

Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides

RISSER Laurent

4 février 2006

Table des matières

1	Introduction	7
2	Rappels sur les Équations aux Dérivées Partielles	9
2.1	Classification mathématique	9
2.1.1	Transformations non singulières	9
2.1.2	EDP hyperboliques	10
2.1.3	EDP parabolique	13
2.1.4	EDP elliptiques	14
2.1.5	Problème bien posé	15
2.2	Systèmes d'équations	15
2.2.1	Exemple de système linéarisé	15
2.2.2	Systèmes d'équations d'ordre un	16
2.2.3	Système d'EDP d'ordre deux	16
2.3	Exemples d'EDP intéressantes	16
2.3.1	Equation d'onde linéaire d'ordre un	16
2.3.2	Equation de Burgers non-visqueuse	16
2.3.3	Equation de Burgers	17
2.3.4	Equation de Tricomi	17
2.3.5	Equation de Poisson	17
2.3.6	Equation d'advection-diffusion	17
2.3.7	Equation de Korteweg-de-Vries	17
2.3.8	Equation d'Helmoltz	17
3	Rappels sur les différences finies	19
3.1	Introduction	19
3.2	Construction de schémas	20
3.2.1	Idée	20
3.2.2	Exemple de schéma pour une équation différentielle	21
3.2.3	Exemple de schéma pour une EDP simple	22
3.3	Erreur de troncature	23
3.4	Consistance	23
3.5	Stabilité	24
3.6	Convergence	24
3.7	Erreurs dues à la discrétisation	24
3.8	Forme conservative	24
4	Les équations de la mécanique des fluides	25
4.1	Navier-Stokes compressible	25
4.2	Cas incompressible	26
4.3	Différences entre le cas compressible et le cas incompressible	27
4.4	Classification	27

5	Différences finies pour équations modèles	29
5.1	Equation d'onde d'ordre 1	29
5.1.1	Méthode de Lax	29
5.1.2	Schémas explicites d'Euler	32
5.1.3	Schéma explicite régressif	32
5.1.4	Schéma d'Euler implicite	34
5.1.5	Schéma 'Leap Frog' (saute mouton)	34
5.1.6	Autres schémas	35
5.2	Equation de la chaleur	35
5.2.1	Présentation	35
5.2.2	Méthode de Crank-Nicolson	35
5.2.3	Généralisation de Crank-Nicolson	35
5.3	Equation de la chaleur $2D$	35
5.3.1	Adaptation des schémas $1D$	36
5.3.2	Méthode ADI	38
5.4	Equation de Laplace	39
5.4.1	Formule à cinq points	39
5.5	Equation de transport $1D$ (linéaire)	40
5.5.1	Schéma explicite FTCS (Roache 1972)	41
5.5.2	Schéma implicite de Crank-Nicolson	42
5.6	Equation de transport $2D$	42
5.7	Equation de Burgers non linéaire	42
5.7.1	Schéma implicite de Bridley-Mc Donald (1974)	43
6	Résolution numérique de Navier-Stokes incompressible	45
6.1	Présentation	45
6.2	Ecoulement stationnaire	45
6.2.1	Méthode de la compressibilité artificielle	45
6.2.2	Méthode Marker And Cell (MAC)	46
6.2.3	Stabilité du schéma MAC	48
6.3	Écoulement instationnaire	50
6.3.1	Méthode de projection	50
6.3.2	Méthode de projection implicite	52
6.3.3	Méthode SIMPLE	53
6.3.4	Fonction de courant, vortacité	54
7	Méthodes spectrales	59
7.1	Approximation pseudo-spectrale	59
7.2	Calcul pratique de l'approximation pseudo-spectrale des dérivées	60
7.3	Méthodes pseudo-spectrales pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.	61
7.4	L'anti-aliasing	62

Chapitre 1

Introduction

Vous êtes vous déjà demandé un jour ce qu'était un modèle ? C'est une représentation simplifiée de la réalité physique. Par simplification, on entend la négligence des phénomènes peu influants à l'échelle étudiée. Par exemple si l'on étudie l'écoulement de l'air autour d'une automobile, on ne prend pas en compte le mouvement de chaque particule de l'air. On moyenne sur de petits volumes la vitesse et la pression induits par les particules. Ces volumes sont petits par rapport à la taille de l'objet étudié mais très grands par rapport à l'échelle microscopique. La mécanique des fluides fournit une multitude de modèles pour étudier des fluides plus ou moins visqueux, compressibles ou incompressibles, stationnaires ou instationnaires.

Dans le cadre de ce cours, nous allons étudier des méthodes numériques qui permettent de résoudre les modèles couramment rencontrés en mécanique des fluides non compressibles.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, positionons ces méthodes par rapport aux méthodes expérimentales et théoriques

En toute logique, l'approche expérimentale est la plus réaliste. Cependant elle est la plus coûteuse. Elle peut aussi poser des problèmes d'échelle. Par exemple, l'analogie des Reynolds n'est pas toujours respectable. De même, elle pose des difficultés liées aux mesures. Les outils de mesures sont intrusifs ce qui peut fausser les résultats et poser des difficultés d'accès à certaines zones. Les conditions limites ne sont pas non plus forcément idéales. Enfin, les études paramétriques sont longues.

L'approche théorique demande de modéliser le phénomène physique étudié. En supposant que le modèle est bon à l'échelle étudiée, cette approche a la grande qualité de fournir une solution exacte. Son principal défaut est qu'il est souvent nécessaire de simplifier la géométrie ainsi que la physique de l'objet étudié et son environnement. De même, les problèmes non linéaires ne sont pas traités.

Tout comme l'approche théorique, l'approche numérique demande de modéliser le phénomène physique étudié. Contrairement à la première, elle permet de prendre en compte des équations bien plus complexes dont les non linéaires (les équations de Navier-Stokes par exemple). De même, une géométrie plus complexe et l'évolution en temps peut être prise en compte. L'approche théorique a cependant aussi des limites. Elle implique des erreurs liées à la discrétisation (troncature et convergence) et à la résolution (arrondis). Elle pose aussi des problèmes liés aux conditions limites. On peut signaler que bien des phénomènes ne sont pas encore modélisés. Enfin, il faut bien avoir en tête que les machines qui vont résoudre le problème n'ont pas une mémoire et une cadence d'horloge infinie. On doit donc étudier des domaines de taille et de finesse raisonnable.

Concentrons nous maintenant sur la mécanique des fluides numérique. Les équations, typiquement des EDP sont un modèle de la réalité. Les solutions exactes des modèles de la mécanique des fluides, typiquement des EDP, sont très rares. Il est donc souvent nécessaire de discrétiser ces équations pour produire un résultat approché sur ordinateur. Les fluides sont décrits par différentes équations suivant que l'on se place d'un point de vue Lagrangien ou Eulerien. Le premier consiste à étudier le mouvement de chaque particule d'un fluide, alors que le second consiste à décrire le fluide par ses caractéristiques globales que sont la densité volumique, la vitesse et la pression. Nous nous focaliserons ici sur le point de vue Eulerien.

Il est important d'être conscient que le traitement d'un problème de grande complexité implique un grand nombre de points dans le maillage. Il est donc nécessaire de posséder de bonnes capacités en terme de mémoire et de rapidité CPU. On peut constater qu'avec le temps, les cadences processeur et la taille de la RAM ne cessent d'augmenter. A ceci s'ajoute l'amélioration constante de l'efficacité des algorithmes de résolution d'EDP. Il est donc possible de traiter des problèmes de plus en plus finement.

Chapitre 2

Rappels sur les Équations aux Dérivées Partielles

Les lois de la nature sont souvent gouvernées par des EDP. Il est donc important de comprendre le comportement physique des modèles ainsi que le caractère mathématique des équations.

2.1 Classification mathématique

On distingue EDP linéaire et EDP non linéaire. Les EDP linéaires ne contiennent aucun produit de variable avec elle-même ou une de ses dérivées alors que les EDP non linéaires peuvent en posséder. Par exemple :

Equation de propagation d'onde (linéaire) :	Equation de Burgers (non linéaire) :
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

avec u qui dépend de x et de t et ν une constante. Nous nous focalisons ici sur les EDP linéaires. Les EDP non linéaires seront l'objet d'étude des derniers chapitres de ce cours.

La classification des EDP linéaires se fait sur la base d'une équation d'ordre 2 standard :

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = g(x, y) \quad (1)$$

où a, b, c, d, e, f sont fonctions de (x, y) . C'est une équation linéaire. Le type de l'EDP dépend de son discriminant, $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$ alors, l'EDP est hyperbolique.
- $\Delta = 0$ alors, l'EDP est parabolique.
- $\Delta < 0$ alors, l'EDP est elliptique.

2.1.1 Transformations non singulières

Supposons une transformation de (x, y) vers (ξ, η) (variables indépendantes) non singulière. J le jacobien de la transformation :

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

Calcul de l'équation transformée :

- $\Phi_x = \Phi_\xi \xi_x + \Phi_\eta \eta_x$
- $\Phi_{xx} = (\Phi_x)_x = \Phi_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2\Phi_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + \Phi_{\eta\eta} \eta_x^2 + \Phi_\xi \xi_{xx} + \Phi_\eta \eta_{xx}$
- mêmes calculs pour $\Phi_y, \Phi_{yy}, \Phi_{xy}$

En remplaçant dans (1), on trouve :

$$A\Phi_{\xi\xi} + B\Phi_{\xi\eta} + C\Phi_{\eta\eta} + \dots = g_2(\xi, \eta) \quad (2)$$

avec :

- $A = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2$
- $B = 2a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + 2c\xi_y\eta_y$
- $C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$

Le discriminant de (2) est :

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 = J^2(b^2 - 4ac)$$

or $J^2 > 0$ donc l'équation transformée est du même type que l'équation initiale.

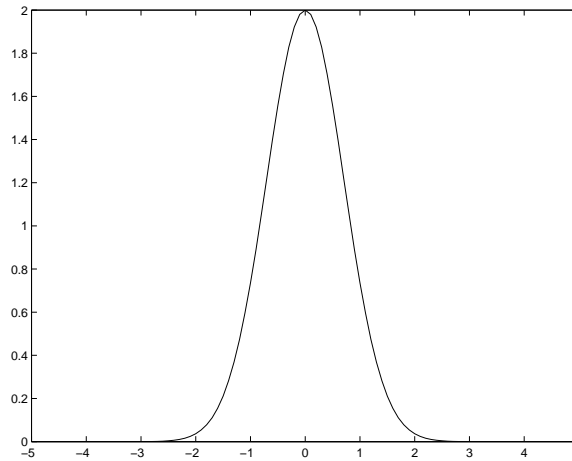
2.1.2 EDP hyperboliques

Présentation

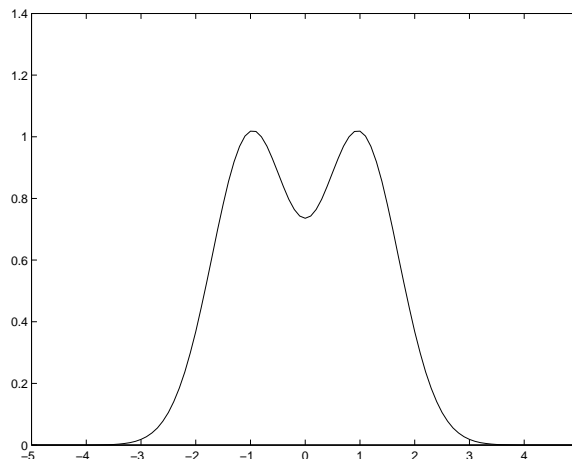
L'exemple le plus simple d'EDP hyperbolique est l'équation de propagation d'une onde (advection) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

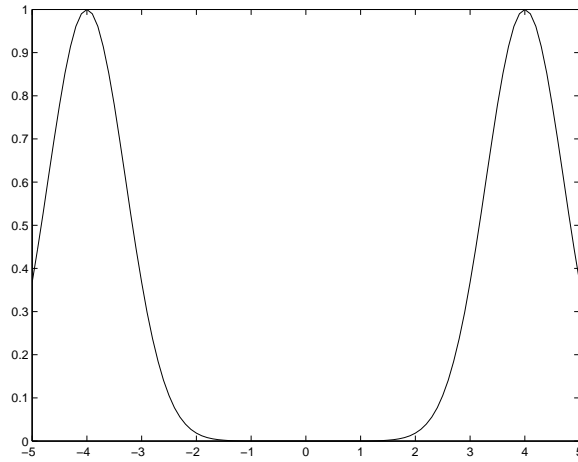
$T = 0$ secondes :



$T = 1$ secondes :



$T = 4$ secondes :



Une des caractéristiques des fonctions régies par une EDP hyperbolique linéaire est que leur énergie ne s'atténue pas au fil du temps.

Interprétation par caractéristiques

Une caractéristique interprète la vitesse et direction à laquelle est transportée l'information au cours du temps.

Pour une équation :

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + \Phi_{yy} + \dots = g(x, y) \quad (3),$$

on cherche les coordonnées caractéristiques ξ et η telles que $\xi(x, y) = \text{const}_1$ et $\eta(x, y) = \text{const}_2$ le long de ces caractéristiques. Pour (3), on a $\xi = y - \lambda_1 x$ et $\eta = y - \lambda_2 x$ avec :

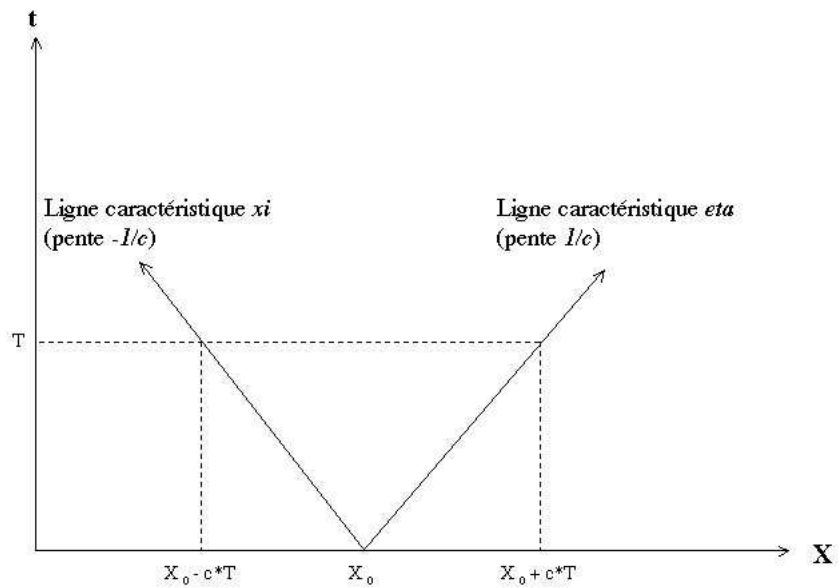
$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \underbrace{=}_{\text{prop.}} \frac{dy}{dx}$$

Par exemple :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ x \in [-\infty, +\infty] \\ u(0, x) = f_{ini}(x) \end{cases}$$

Cette équation régit la propagation d'une onde sonore à vitesse c en milieu uniforme dans le temps et l'espace. Les courbes caractéristiques de ce problème sont les courbes intégrales de :

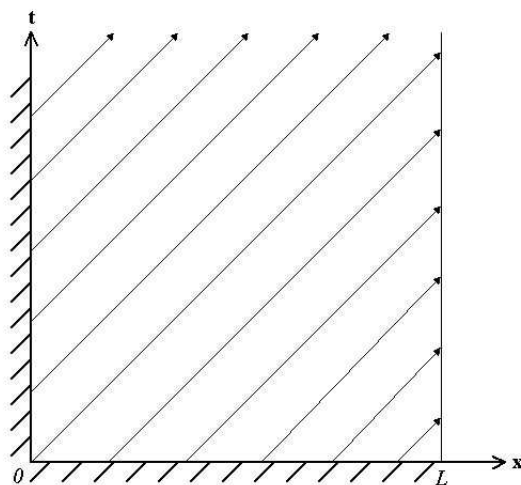
$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{\sqrt{4c^2}}{2} = \pm c$$



On dit que l'information se propage le long des caractéristiques. (ie : en prenant comme C.I. un Dirac en $x = 1$ et 0 ailleurs, on va observer son déplacement le long des caractéristiques)

Domaine borné

Pour que le problème soit bien posé, il faut fixer les valeurs de la fonction là où les caractéristiques sont entrantes.



Intuitivement, on voit bien que si l'on impose une Condition au Bord là où la caractéristique est sortante, l'information ne rentre pas dans le domaine étudié. Cette condition est donc inutile. Parallèlement, là où les caractéristiques sont entrantes (C.I. incluses), l'information au bord pénètre dans le domaine.

2.1.3 EDP parabolique

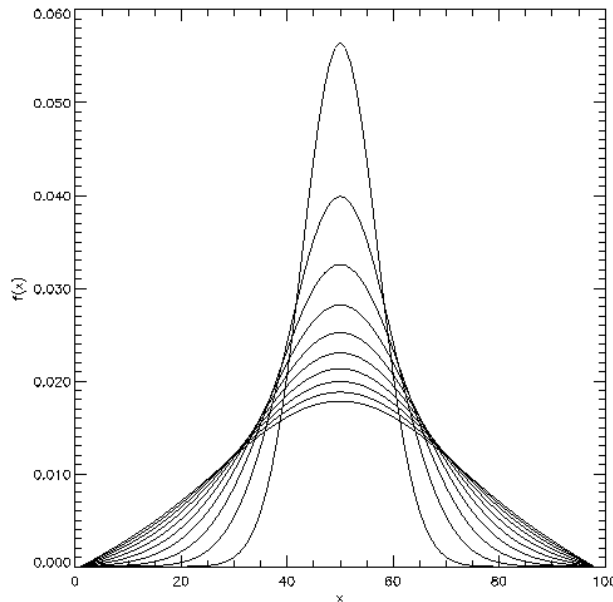
Présentation

Une EDP parabolique modélise des problèmes de propagation dissipative. Un schéma classique est celui de la diffusion (conduction de la chaleur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Pour les C.I. $u_0 = \sin(\pi x)$ et les conditions aux bords $u(0, t) = u(1, t) = 0$, on a la solution exacte :

$$u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$$



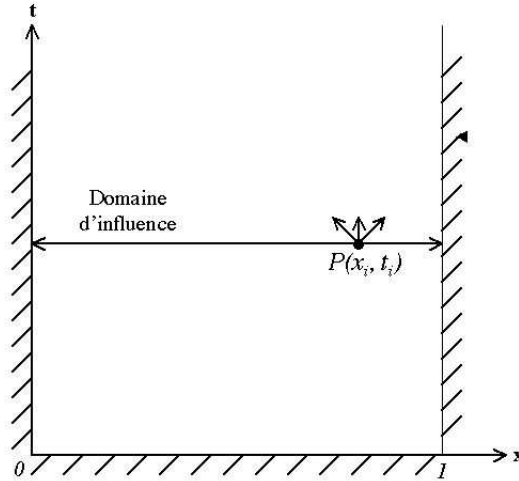
remarque : Beaucoup de formes réduites de Navier-Stokes sont gouvernées par des EDP paraboliques.

Interprétation par caractéristiques

Ici, les caractéristiques (dt/dx) sont nulles. Elles ne jouent donc pas le même rôle que pour les équations hyperboliques et n'avancent en rien pour l'explication du mouvement.

Domaine borné

Ici, sur tous les bords d'un domaine borné, de l'information est entrante. En effet, à chaque pas de temps, l'information s'étale dans toutes les directions au niveau spatial.



Les C.I. doivent être des conditions de Dirichlet ($u(x, 0) = u_0(x)$). Aux bords, des conditions de Dirichlet ($u(Bord, t) = g(t)$), de Neumann ($\frac{\partial u(Bord, t)}{\partial x} = h(t)$), ou bien mixtes sont nécessaires.

2.1.4 EDP elliptiques

Présentation

En mécanique des fluides, les EDP elliptiques sont associées aux problèmes stationnaires. Elles ne modélisent donc plus des problèmes d'évolution comme dans le cas hyperbolique ou parabolique. Les conditions initiales n'ont donc pas la même interprétation (elles deviennent des conditions limites). Une EDP elliptique type est l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation gouverne les flux incompressibles à potentiel. Par exemple, pour le domaine $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ et les conditions aux bords :

$$\begin{cases} \Phi(x, 0) = \sin(\pi x) \\ \Phi(x, 1) = \sin(\pi x)e^{-\pi} \\ \Phi(0, y) = \Phi(1, y) = 0 \end{cases}$$

La solution est :

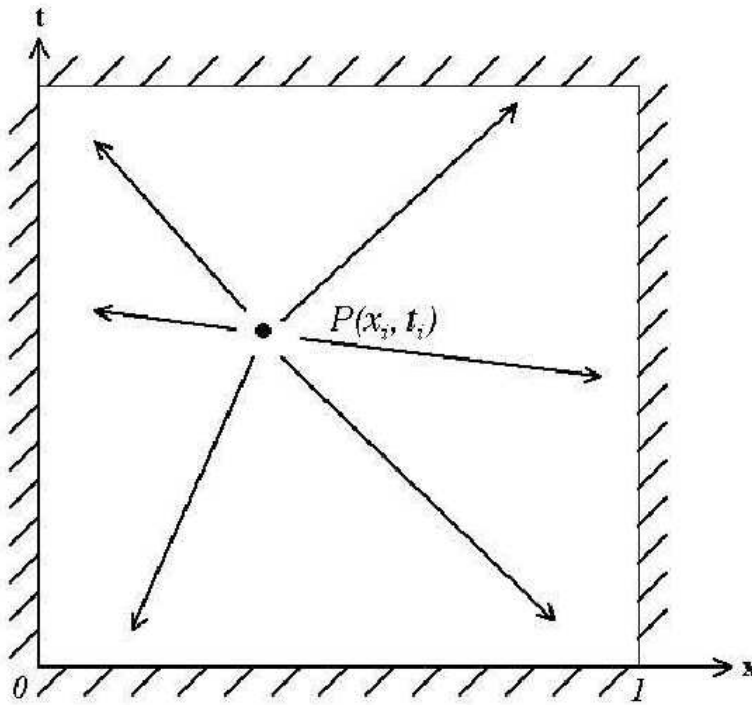
$$\Phi(x, y) = \sin(\pi x)e^{-\pi y}$$

Interprétation par caractéristiques

Les caractéristiques sont en général complexes pour un problème d'ordre 2. Elles nous sont donc inutiles ici.

Domaines bornés

Un point à l'intérieur du domaine influe sur tout le domaine et donc sur **tous** les bords.



Aux bords, des conditions de Dirichlet, de Neumann ou bien mixtes sont possibles. Il faut toutefois prendre garde en utilisant des conditions de Neumann. L'équation gouvernante doit être consistante avec les conditions aux bords via le théorème de Green :

$$\int_{\partial R} f ds = \int_R \nabla^2 \Phi dV$$

2.1.5 Problème bien posé

Le problème d'une EDP+C.L.+C.I. est bien posé si la solution existe, si elle est unique et si elle dépend avec continuité des C.L. ou des C.I. ie, une petite dérivation dans les C.L. ou les C.I. produit une petite dérivation dans la solution. Cf : Hadamard, 1932

2.2 Systèmes d'équations

En général, la physique d'un phénomène se modélise par un système d'EDP. De même, une EDP d'ordre élevé peut normalement se poser sous la forme d'un système d'équations d'ordre un.

2.2.1 Exemple de système linéarisé

L'équation d'onde d'ordre deux est :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

On introduit v et w , deux variables indépendantes telles que :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad w = c \frac{\partial u}{\partial x}$$

alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

donc :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0$$

avec :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Systèmes d'équations d'ordre un

Forme générale :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + [B] \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \vec{r} = 0$$

avec :

$$\begin{cases} [A] = a_{i,j}(t, x, y) \\ [B] = b_{i,j}(t, x, y) \\ \vec{u} \text{ le vecteur d'inconnues} \\ \vec{r} = \vec{r}(\vec{u}, x, y) \end{cases}$$

On distingue deux types d'EDP d'ordre un dans la direction (x, t) :

- Si les valeurs propres de $[A]$ sont réelles et distinctes, le système est hyperbolique dans cette direction.
- Si les valeurs propres de $[A]$ sont complexes, le système est elliptique dans cette direction.

Pour la direction (y, t) , on observe les v.p. de $[B]$ et on suit le même raisonnement. Par exemple pour l'équation d'onde :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -c \\ -c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - c^2 = 0$$

donc :

$$\lambda_{1,2} = \pm c \in \mathbb{R}$$

Le comportement est hyperbolique dans la direction (x, t)

2.2.3 Système d'EDP d'ordre deux

C'est très complexe. Le seul cas simple est le système d'EDP :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = [A] \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2}$$

Ce système est parabolique (en temps) si toutes les v.p. de $[A]$ sont réelles.

2.3 Exemples d'EDP intéressantes

2.3.1 Equation d'onde linéaire d'ordre un

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Propagation d'une onde vers la droite à la vitesse c .

2.3.2 Equation de Burgers non-visqueuse

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Propagation d'onde **non linéaire** monodimensionnelle. La non linéarité est due au terme $u \frac{\partial u}{\partial x}$.

2.3.3 Equation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Cette équation est un modèle 1D de Navier-Stokes. Elle n'est pas linéaire.

2.3.4 Equation de Tricomi

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Problème mixte : elliptique ou hyperbolique suivant le signe de y . Modélise par exemple les écoulements transsoniques non visqueux.

2.3.5 Equation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Conduction thermique dans un solide avec source $f(x, y)$.

2.3.6 Equation d'advection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2.3.7 Equation de Korteweg-de-Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Ondes non linéaires dispersives.

2.3.8 Equation d'Helmoltz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K^2 u = 0$$

Ondes harmoniques en fonction du temps avec K le paramètre de fréquence. Exemple : propagation d'ondes acoustiques dans un milieu 2D.

Chapitre 3

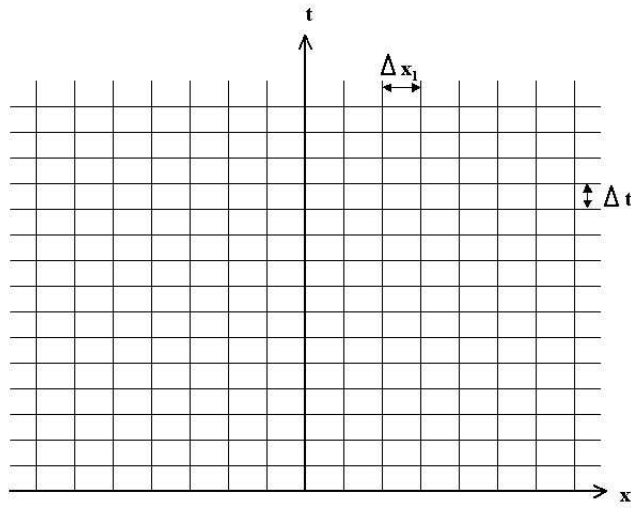
Rappels sur les différences finies

3.1 Introduction

Les différences finies sont une méthode de résolution numérique des EDP (avec les éléments finis et les volumes finis principalement). Avec les schéma de ce type, les erreur dues à la discrétisation sont polynomiales (ex : en $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$).

Pour la résolution d'une EDP de dimension $n + 1$ (espace+temps), on introduit un maillage de l'espace \mathbb{R}^n de pas Δx_i et du temps de pas Δt .

exemple, pour $n = 1$:



On construit ainsi une grille. On note :

$$\begin{cases} x_{i_j} = j \Delta x_i & \text{pour } j \in \mathbb{Z} \\ t^k = k \Delta t & \text{pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Les noeuds de la grille sont les coordonnées $(x_{1_j}, \dots, x_{n_j}; t^k)$.

Les différences finies consistent à approcher les opérateurs de dérivation par des *opérateurs discrets de dérivation*. Par exemple, pour $n = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(t^k, x_{1_j}) \simeq \frac{u(t^k, x_{1_j} + \Delta x_1) - u(t^k, x_{1_j})}{\Delta x_1}$$

où $u(t^k, x_{1j})$ est l'approximation de U , la fonction continue régie par l'EDP au point $(t_0 + k\Delta t, x_0 + j\Delta x)$.

Nous étudions dans la prochaine section la construction de tels schémas pour une équation différentielle et une EDP avec un terme en espace 1D. Pour l'EDP, nous distinguerons schéma implicite et schéma explicite. Les sections suivantes traitent des problèmes que provoquent la discrétisation.

3.2 Construction de schémas

3.2.1 Idée

Soit u une fonction d'une variable, de classe C^4 . Si h tend vers 0, nous avons les deux formulations suivantes (formule de Taylor) :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{4}u'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad (3.1)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{4}u'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad (3.2)$$

En combinant (3.1) et (3.2), il vient naturellement :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (3.3)$$

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (3.4)$$

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.5)$$

et :

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.6)$$

L'équation (3.3) est appelée l'approximation à droite de $u'(x)$ et l'équation (3.4) l'approximation à gauche de $u'(x)$. Ces deux équations sont cependant grossières puisqu'elles sont en $\mathcal{O}(h)$. L'équation (3.5), appelée approximation centrée de $u'(x)$, est plus précise puisqu'elle est en $\mathcal{O}(h^2)$. Quand à l'équation (3.6), il s'agit de l'approximation de $u''(x)$ et elle est aussi en $\mathcal{O}(h^2)$.

Passons maintenant en **dimension deux**. On considère maintenant u comme une fonction de deux variables de classe C^4 . Le principe d'approximation des dérivées est exactement le même. Si Δx et Δy tendent vers 0, nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{u(x, y) - u(x - \Delta x, y)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.9)$$

et :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.10)$$

Il en est de même pour les dérivées par rapport à la variable y . Ces formules permettent de comprendre la discrétisation qui va s'effectuer sur les équations aux dérivées partielles.

3.2.2 Exemple de schéma pour une équation différentielle

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p(x)\frac{d}{dx}u(x) + q(x)u(x) = f(x) & x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

Nous supposons p, q et f suffisamment régulières avec $q(x) > 0$. Subdivisons le segment $[0, 1]$ en $N + 1$ points. Le pas du maillage est :

$$h = \frac{1}{N}$$

Et les noeuds du maillage sont :

$$x_i = ih \quad i = 0, \dots, N$$

Le système est vérifié en chaque point du maillage :

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x_i) + p(x_i)\frac{d}{dx}u(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i)$$

Nous utilisons les approximations (3.5) et (3.6) :

$$-\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + p(x_i)\frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + q(x_i)u(x_i) = f(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

On néglige le terme $\mathcal{O}(h^2)$. En notant u_i la valeur approchée de u aux points x_i , on obtient :

$$\begin{cases} u_{i-1}\left(-\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right) + u_i\left(\frac{2}{h^2} + q_i\right) + u_{i+1}\left(-\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right) = f_i \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

Notons $a_i = \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)$, $b_i = \left(\frac{2}{h^2} + q_i\right)$ et $c_i = \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)$. Nous aboutissons alors au système :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & & \\ 0 & a_3 & b_3 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & b_{N-2} & c_{N-2} & & & & \\ & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - a_1\alpha \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} - c_{N-1}\beta \end{bmatrix}$$

Il reste à étudier l'ordre du schéma, sa consistance et sa convergence. Nous verrons plus tard dans ce chapitre comment faire.

3.2.3 Exemple de schéma pour une EDP simple

Considérons l'équation suivante (équation de la chaleur) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in]0, T[*]0, 1[\\ u(x, 0) = \Phi(x) & \text{condition initiale} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{condition limite} \end{cases}$$

On peut considérer qu'il s'agit de l'évolution de la température d'une barre soumise aux extrémités à une température nulle.

schéma explicite

Construisons un maillage régulier. on note $x_j = j\Delta x$ avec $j = 0, \dots, N$ et $t_n = n\Delta t$. On note u_j^n l'approximation de $u(x_j, t_n)$.

En utilisant pour la dérivée temporelle une approximation à droite, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

le schéma se pose alors :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} & j = 1, \dots, N-1 \\ u_j^0 = \Phi(x_j) & j = 1, \dots, N-1 \\ u_0^n = u_N^n = 0 & \forall n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On connaît les u_j^0 , on en déduit les u_j^1 et ainsi de suite jusqu'aux u_j^n . Ce schéma est dit explicite car les u_j^{n+1} se déduisent directement des u_j^n . Dans ce genre de schéma, aucun système d'équation n'est à résoudre (pas de matrice à inverser numériquement !!!), le nouveau pas se déduit des pas précédemment calculés.

schéma implicite

Discretisons la même équation avec le même maillage mais utilisons cette fois une approximation à gauche pour la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

Ce simple changement semble anodin. En fait les modifications engendrées sont très importantes. Observons le nouveau schéma :

$$\begin{cases} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} & j = 1, \dots, N-1 \\ u_j^0 = \Phi(x_j) & j = 1, \dots, N-1 \\ u_0^n = u_N^n = 0 & \forall n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce schéma nécessite la résolution d'un système d'équations. Au temps t_n le système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & & & \\ \beta & \alpha & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \alpha & \beta & & \\ & & & \beta & \alpha & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u_1^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_0^n \\ -\frac{u_2^{n-1}}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{u_{N-2}^{n-1}}{\Delta t} \\ -\frac{u_{N-1}^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_0^n \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{u_1^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_N^n \\ -\frac{u_2^{n-1}}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{u_{N-2}^{n-1}}{\Delta t} \\ -\frac{u_{N-1}^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_N^n \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = -\frac{1}{\Delta t} - \frac{2D}{\Delta x^2}$ et $\beta = \frac{D}{\Delta x^2}$. Trouver les u_j^n à partir des u_j^{n-1} nécessite ici la résolution d'un système i.e. l'inversion d'une matrice. Le système est ici tridiagonal. On peut le résoudre facilement par l'algorithme de Thomas, spécialement adapté aux matrices bandes. Un tel schéma est implicite.

La discrétisation du problème induit plusieurs problématiques que nous étudions dans les sections suivantes. Nous y analyserons des problèmes de dimension 1. La valeur de $u(t^n, x_j)$ y est toujours approximée par u_j^n .

3.3 Erreur de troncature

Le calcul des erreurs de troncature est usuellement basé sur les développements de Taylor. Par exemple, pour l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On utilise un schéma explicite centré en espace :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

En développant u_j^{n+1} et u_j^n par développement de Taylor, soustrayant les résultats et divisant le tout par Δt , on retrouve l'erreur de troncature sur le temps, $\mathcal{O}(\Delta t)$. En suivant le même principe avec le terme sur l'espace, on trouve une erreur en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Au final :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \text{E.T.}$$

avec E.T., l'erreur de troncature. L'ordre de l'erreur de troncature est $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$.

3.4 Consistance

Un schéma aux différences finies est consistant si :

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \text{E.T.} = 0$$

Des problèmes peuvent se poser si l'erreur de troncature varie comme $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Dans ce cas, on est obligé de raffiner de sorte que $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$

3.5 Stabilité

Ce concept s'applique aux problèmes d'évolution. Par définition, un schéma numérique est stable si les erreurs (d'arrondi, de troncature,...) ne peuvent pas croître pendant la procédure numérique d'un pas de temps au suivant.

Un schéma peut être :

- Inconditionnellement stable : Quels que soient Δt et Δx les erreurs causées par le schéma numérique n'explode pas au fil des itérations.
- Conditionnellement stable : On doit poser une condition sur Δt et Δx pour que la solution n'explode pas.
- Inconditionnellement instable : Quels que soient Δt et Δx les erreurs s'amplifient au fil des itérations. Ceci cause des résultats complètement faux.

3.6 Convergence

Un schéma convergent est un schéma *numériquement stable*. Une condition nécessaire à la convergence d'un schéma est :

$$\text{STABILITE} + \text{CONSISTANCE}$$

Ce théorème est applicable pour les EDP linéaires. On le suppose aussi valable dans le cas non linéaire.

3.7 Erreurs dues à la discrétisation

Il en existe deux types, les erreurs d'arrondi (ε_{arr}) et les erreurs de discrétisation ($\varepsilon_{\text{disc}}$). Les premières s'expliquent par le nombre fini de chiffres après la virgule et les secondes par les erreurs de troncature. On a :

$$|(\text{sol. exacte de l'EDP}) - (\text{sol. trouvée par l'ordinateur})| = |\varepsilon_{\text{arr}} - \varepsilon_{\text{disc}}|$$

3.8 Forme conservative

Une EDP posée sous forme conservative possède la particularité suivante : Ses coefficients ne se retrouvent pas dans les dérivées.

Par exemple :

	Forme non conservative	Forme conservative
Equ. de continuité ρ et $u = f(x, t)$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$
Equ. de la chaleur $\rho = \rho(\vec{x})$ $c = c(\vec{x})$ $k = k(\vec{x})$ $T = T(\vec{x}, t)$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$

Avantages de la forme conservative :

- Meilleure prise en compte des EDP avec coefficients non continus (ex : ondes de choc).
- Prise en compte du principe de conservation sur une **région finie**. Ceci implique la suppression de petites sources et de petits puits de matière (sauf aux bords du domaine).

Chapitre 4

Les équations de la mécanique des fluides

4.1 Navier-Stokes compressible

Les équations de Navier Stokes compressible sous forme conservatives sont :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} = 0$$

avec :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (E_t + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix}$$

où :

- E_t = énergie totale par unité de volume = $\rho(e + \frac{u^2+v^2+w^2}{2})$
- e = énergie interne par unité de masse
- τ_{ij} = tension visqueuse (Newtonienne) = $\mu[(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}]$ ($i, j, k = 1, 2, 3$)
- $\vec{q} = -k\vec{\nabla}T$ (loi de Fourier)
- $p = (\gamma - 1)\rho e$ (pour gaz parfait $e = C_v T$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, $R = C_p - C_v$ alors $p = \rho RT$)

$$- T = (\gamma - 1) \frac{e}{R}$$

Si on re-écrit ces équations sous forme adimensionnelle avec :

- L = longueur caractéristique
- V_∞ = vitesse caractéristique
- L/V_∞ = temps caractéristique
- μ_∞ = viscosité dynamique caractéristique
- ρ_∞ = masse volumique caractéristique
- $p_\infty = \rho_\infty V_\infty^2$ = pression caractéristique
- T_∞ = temps caractéristique
- $e_\infty = V_\infty^2$ = énergie interne caractéristique
- $Re_L = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}$, $M_\infty = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty}}$, $Pr = \frac{C_p \mu}{\alpha}$, $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$

on retrouve les mêmes équations avec :

- $\tau_{xx} = \frac{2\mu}{3Re_L} (2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z})$
- $\tau_{yy} = \dots$
- $\tau_{zz} = \dots$
- $\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re_L} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$
- $\tau_{xz} = \dots$
- $\tau_{yz} = \dots$
- $q_x = \frac{\mu}{(\gamma-1)M_\infty^2 Re_L Pr} \frac{\partial T}{\partial x}$
- $q_y = \dots$
- $q_z = \dots$

et les équations d'état sont :

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad \text{et} \quad T = \frac{\gamma M_\infty^2 p}{\rho}$$

La pression a une signification thermodynamique dans le cas compressible.

4.2 Cas incompressible

Le cas incompressible (avec $\mu = \text{const}$) se traduit par :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{la masse volumique est constante le long d'une ligne de courant}$$

Si ρ est constant en amont alors ρ est constant partout dans le domaine. Alors :

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

L'équation de Navier-Stokes en variables *primitives* (p, \vec{u}) est alors (forme non conservative) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} & \text{(Equation de mouvement)} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 & \text{(Equation de continuité)} \end{cases}$$

avec :

- $\vec{u}\vec{v}$: le produit tensoriel entre \vec{u} et \vec{v} .
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$: le produit vectoriel entre \vec{u} et \vec{v} .

Ici, la pression a une signification mécanique et non pas thermodynamique. La forme conservative des équations de N.S. est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{u}\vec{u})}_{\text{tenseur}} = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 \end{cases}$$

car :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \underbrace{\vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}_{\substack{\text{nul dans} \\ \text{le cas} \\ \text{incomp.}}}$$

4.3 Différences entre le cas compressible et le cas incompressible

Le cas incompressible n'a pas une équation d'évolution pour la pression ; donc on ne peut pas produire une solution directe pour toutes les variables (comme c'est le cas pour les équations compressibles).

Le cas compressible peut être subsonique ($M_\infty < 1$) ou supersonique ($M_\infty > 1$). Si $M_\infty > 1$, on peut avoir des difficultés numériques pour l'apparition d'ondes de choc, de raréfaction, lignes soniques et discontinuités de contact. Par exemple, la présence d'une ligne sonique sépare la région elliptique ($\mu = 0$, $M_\infty < 1$) de la région hyperbolique ($\mu = 0$, $M_\infty > 1$), d'où des problèmes de technique numérique.

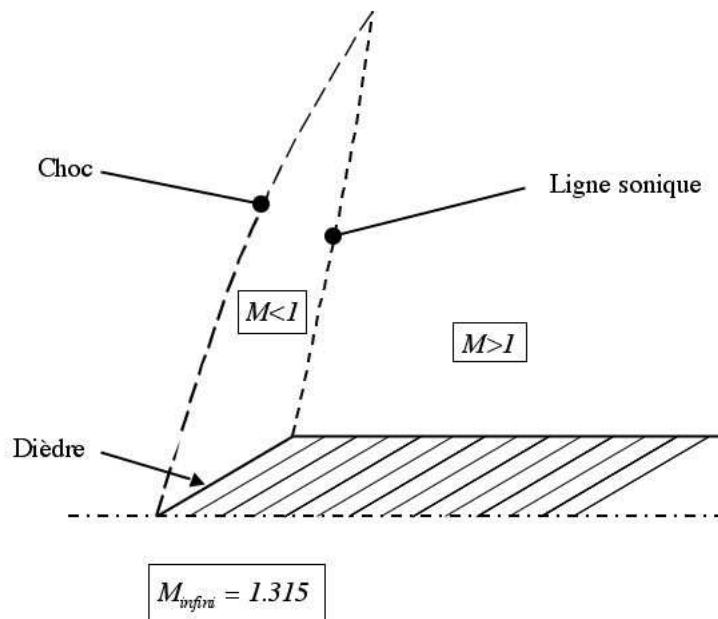
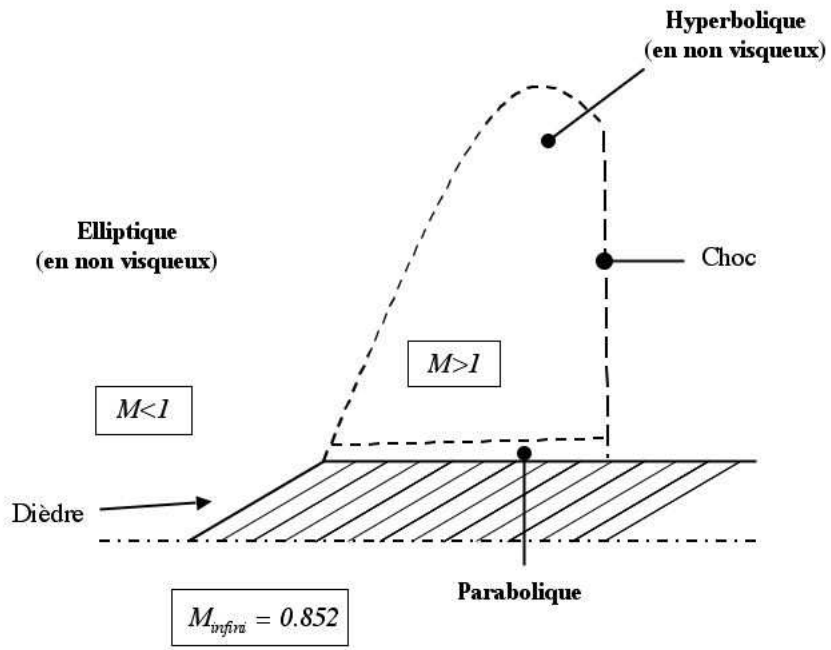
4.4 Classification

Le modèle d'Euler est celui d'un fluide dont on ne tient pas compte de la viscosité (fluide parfait).

	$M_\infty < 1$	$M_\infty = 1$	$M_\infty > 1$
– Euler station.	Ellipt.	Parab.	Hyperbo.
– Euler instation.	Hyperbo.	Hyperbo.	Hyperbo.

- N.S. instationnaire :
 - Compressible : Type hyperbolique - parabolique (en temps)
 - Incompressible : Type elliptique - parabolique (en temps)
- N.S. stationnaire :
 - $M_\infty < 1$: elliptique
 - $M_\infty > 1$: hyperbolique
- Equations de la couche limite (cas compr. et incomp.) : Parabolique en x (direction d'évolution).

Pour des problèmes complexes, le modèle se divise en plusieurs parties.



Evidemment, les techniques diffèrent selon le type d'équations.

Chapitre 5

Différences finies pour équations modèles

Dans un cadre pédagogique, ces équations sont intéressantes car elles ont des solutions exactes. Elles permettent de comparer les résultats des schémas numériques aux résultats idéaux. Ceci est intéressant pour évaluer l'efficacité des schémas. Dans un cadre plus pratique, ces équations permettent souvent de modéliser le comportement d'EDP plus complexes.

5.1 Equation d'onde d'ordre 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c > 0$$

Cette équation est un modèle pour un écoulement instationnaire non visqueux. Pour la condition initiale $u(x, 0) = F(x)$, sa solution exacte est $u(x, t) = F(x - ct)$. Nous avons vu au chapitre 2 que l'information initiale se propage le long de la caractéristique $\frac{dx}{dt}$ (ici : $\frac{dx}{dt} = c$).

5.1.1 Méthode de Lax

Présentation

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

avec n l'index de temps et j l'index d'espace. Ici, l'erreur de troncature est :

$$\mathcal{O}\left[\Delta t, \underbrace{\frac{\Delta x^2}{\Delta t}}_{\substack{\text{non unif.} \\ \text{consistant}}}\right]$$

Etude de la stabilité

L'étude de la stabilité de ce schéma va nous servir d'exemple pour présenter deux notions importantes, la *dissipation artificielle* (liée au comportement en amplitude de l'erreur) et la *dispersion* (liée au comportement en phase de l'erreur).

Avant toute chose, il est nécessaire de remarquer que l'erreur numérique et la solution exacte ont les mêmes propriétés de croissance dans le temps. Les erreurs dans un système stable ne

croissent donc pas dans le temps.

La méthode de stabilité est celle de **von Neumann** (ou de Fourier). L'erreur initiale (à $t = 0$) y est décrite sous la forme d'une série de Fourier :

$$\epsilon(x, 0) = \sum_m \epsilon_m(x, 0) = \sum_m \epsilon_{0m} \exp\left[i \frac{2\pi x_j}{\lambda_m}\right]$$

avec λ_m une longueur d'onde et $k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$ le nombre d'onde correspondant. Le maillage implique :

$$\begin{cases} \lambda_{min} = \Delta x & \text{soit } k_{max} = \frac{2\pi}{\Delta x} \\ \lambda_{max} = L & \text{soit } k_{min} = \frac{2\pi}{L} \end{cases}$$

λ_{min} et λ_{max} représentent le min. et le max. de la gamme finie de longueurs d'ondes. Cette gamme contient $\frac{L}{\Delta x}$ points de discrétisation.

On suppose que l'erreur pour chaque mode de Fourier est sous la forme :

$$\epsilon_m(x, t) = \epsilon_{0m} g^n \exp(i k_m x_j)$$

de sorte que $\epsilon_m(x, 0) = \epsilon_{0m} \exp(i k_m x_j)$. Il faut bien noter ici le terme g puissance n (n l'itération). L'équation de l'erreur est :

$$\epsilon_j^{n+1} = \frac{\epsilon_{j+1}^n + \epsilon_{j-1}^n}{2} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{\epsilon_{j+1}^n - \epsilon_{j-1}^n}{2} \right]$$

En développant (avec $\epsilon_j^n = g^n e^{i k_m j \Delta x}$), on obtient :

$$g = \cos(K_m \Delta x) - \frac{c\Delta t}{\Delta x} [i \sin(k_m \Delta x)]$$

Or, on a :

$$g = \frac{(\epsilon_m)_j^{n+1}}{(\epsilon_m)_j^n}$$

g est le facteur d'amplification pour le mode de Fourier m . La condition de stabilité est donc :

$$|g| = |\cos(k_m \Delta x) - i\nu \sin(k_m \Delta x)| \leq 1$$

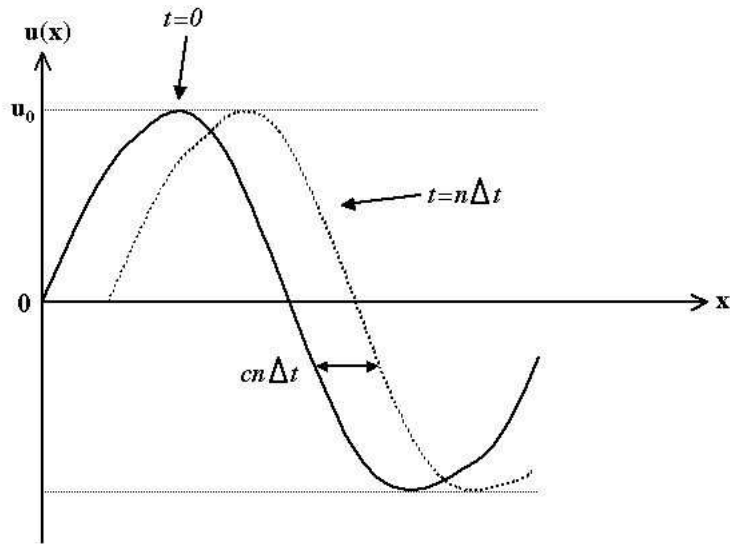
où $\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ est le nombre de courant.

Une condition équivalente de stabilité est $|\nu| \leq 1$ (poser $|g|^2 \leq 1$).

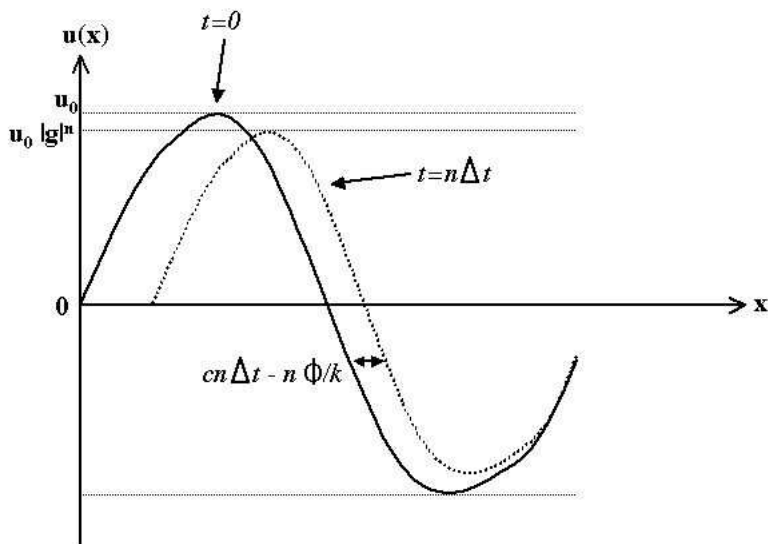
Le facteur d'amplification peut aussi se poser sous la forme :

$$g = |g| e^{i\varphi} = \underbrace{\sqrt{\cos(k_m \Delta x) + \nu^2 \sin(k_m \Delta x)}}_{\text{erreur d'amplitude}} \underbrace{e^{i \tan^{-1}[-\nu \tan(k_m \Delta x)]}}_{\text{déphasage}}$$

Le déphasage s'interprète comme la translation de chaque mode de Fourier dans le schéma.



Solution exacte



Solution approchée numériquement

Si $|g| = 1$ et $\varphi = 0$ (pour chaque mode de Fourier) on n'a pas d'erreur d'amplitude ni de phase. On observe donc ni dissipation artificielle (erreur d'amplitude) ni dispersion (erreur de phase).

5.1.2 Schémas explicites d'Euler

Schéma décentré progressif (en temps et en espace) d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

Schéma centré en espace d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Ces deux schémas sont inconditionnellement instables si $c > 0$. Cela se vérifie par étude de stabilité de Von Neumann. Ces schémas ne peuvent donc pas être utilisés.

5.1.3 Schéma explicite régressif

Présentation

Pour $c > 0$ le schéma qui marche est celui-ci :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Son erreur de troncature est $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$. Une analyse de stabilité de Von Neumann nous montre que la méthode est stable si :

$$0 \leq \nu = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Étude de la diffusion numérique

En général les équations hyperboliques ont peu ou pas de dissipation. Toutefois, le schéma numérique induit souvent de la dissipation artificielle (perte d'amplitude). Il se peut aussi que la vitesse de propagation de l'onde soit changée par dispersion artificielle.

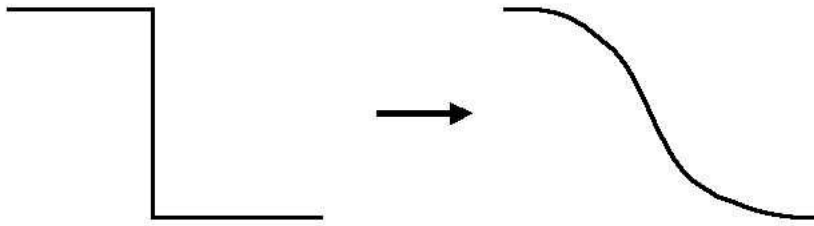
En effectuant des décompositions de Taylor pour u_j^{n+1} et pour u_{j-1}^n (pas besoin de toucher à u_n^j) et en les injectant dans le schéma, on obtient :

$$\underbrace{u_t + cu_x}_{\text{eq. d'onde}} = \underbrace{-\frac{\Delta t}{2}u_{tt} + c\frac{\Delta x}{2}u_{xx} - \frac{\Delta t^2}{6}u_{ttt} - \frac{\Delta x^2}{6}u_{xxx} + \dots}_{\text{E.T.}}$$

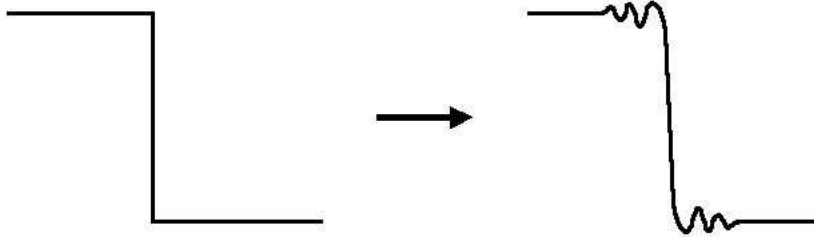
En éliminant toutes les dérivées temporelles à droite, on obtient :

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= -\frac{c^2\Delta t}{2}u_{xx} + \frac{c^3\Delta t^2}{6}u_{xxx} - \frac{c\Delta x^2}{6}u_{xxx} + \frac{c\Delta x}{2}u_{xx} + (\dots)u_{xxx} \\ &+ \mathcal{O}[\Delta x^3, \Delta x^2\Delta t, \Delta x\Delta t^2, \Delta t^3] \\ &= \frac{c\Delta x}{2} \left[1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right] u_{xx} + c\Delta x^2(\dots)u_{xxx} + \dots \end{aligned}$$

Cette dernière équation est l'équation modifiée. Le terme de droite est une autre écriture de l'erreur de troncature. On peut remarquer que l'E.T. contient un terme en $(\dots)u_{xx}$. Celui-ci est similaire à un terme visqueux dans l'équation de Navier Stokes. Quand $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \neq 1$, on introduit donc de la viscosité artificielle dans la solution.



Si le terme principal de l'E.T. est du type $(.)u_{xxx}$, on observe à la place un phénomène de *dispersion* qui change les relations de phase entre les différentes ondes.



D'un point de vue général si le terme dominant dans l'E.T. contient une dérivée :

- paire : On observe principalement des erreurs de *dissipation*. C'est typiquement le cas pour les schémas d'ordre un.
- impaire : on observe principalement des erreurs de *dispersion* (ou wiggles). C'est généralement le cas pour les schémas d'ordre deux.

L'effet combiné de la dispersion et de la dissipation est la *diffusion numérique*. Il est important d'être conscient qu'il existe une relation entre le facteur d'amplification g de l'analyse de Von Neumann et l'équation modifiée.

Remarque 1

Il a été montré qu'une condition nécessaire de stabilité pour un schéma numérique dont le terme principal de l'E.T. est en u_{xx} est que le coefficient qui lui est rattaché soit inférieur à zéro.

Remarque 2

Si $\nu = 1$, on élimine la viscosité artificielle. On retrouve donc la solution exacte. Ceci est en général faisable sur une équation linéaire mais impossible sur tout le domaine avec une équation **non-linéaire**.

5.1.4 Schéma d'Euler implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

Ici, l'erreur de troncature est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$. Le schéma est inconditionnellement stable. On peut le réécrire sous la forme :

$$\frac{\nu}{2} u_{j+1}^{n+1} = u_j^{n+1} - \frac{\nu}{2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n$$

soit :

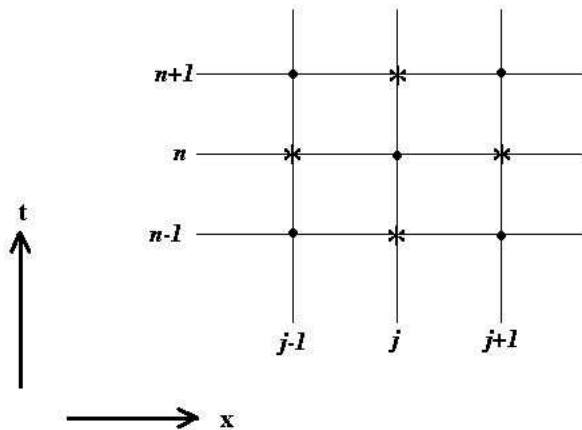
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{2} & & & 0 \\ -\frac{\nu}{2} & 1 & \frac{\nu}{2} & & \\ & -\frac{\nu}{2} & 1 & \frac{\nu}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & -\frac{\nu}{2} & 1 & \frac{\nu}{2} \\ & & & & -\frac{\nu}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{[U^{n+1}]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\nu}{2} u_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{\nu}{2} u_{M+1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{[B]} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{bmatrix}}_{[U^n]}$$

où u_0^{n+1} et u_{M+1}^{n+1} sont les C.L. connues. Le système se résout numériquement en posant $[U^{n+1}] = [A]^{-1}[U^n] - [A]^{-1}[B]$.

5.1.5 Schéma 'Leap Frog' (saute mouton)

C'est un schéma explicite d'ordre deux :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



L'erreur de troncature est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Le schéma est stable si $|\nu| \leq 1$. L'équation modifiée est :

$$u_t + cu_x = \frac{c\Delta x^2}{6}(\nu^2 - 1)u_{xxx} - (\dots)u_{xxxx} + \dots$$

Comptant que l'erreur de troncature ne contient **que** des dérivées paires, le comportement est dispersif et il n'y a pas de dissipation.

5.1.6 Autres schémas

Beaucoup d'autres schémas peuvent être développés : Lax-Wendroff, Mac-Cormack, Rusanov, Warning-Kutler-Lomax, etc.

5.2 Equation de la chaleur

5.2.1 Présentation

L'équation de la chaleur est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Cette équation sert de modèle pour les équations (paraboliques) de couche limite. Nous en présentons ici des schéma adaptés à la résolution de ce type d'EDP.

5.2.2 Méthode de Crank-Nicolson

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2\Delta x^2} [(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})]$$

Les dérivées spatiales sont à moitié évaluées au temps n et à moitié au temps $n + 1$. En prenant un développement de Taylor autour de $(j, n + \frac{1}{2})$, on trouve une erreur de troncature d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Ce schéma est inconditionnellement stable. Il est très populaire pour résoudre les équations paraboliques.

5.2.3 Généralisation de Crank-Nicolson

Une généralisation populaire du schéma de Crank-Nicolson est :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2\Delta x^2} [\theta(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + (1 - \theta)(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})]$$

avec θ une constante comprise entre 0 et 1. On peut constater que si $\theta = 0$, on a un simple schéma explicite ; si $\theta = 1/2$, on retrouve Crank-Nicolson et enfin si $\theta = 1$ on a affaire à un schéma implicite dit de Laasonen.

Ce schéma est stable si :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2-4\theta} & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \\ \text{inconditionnellement stable} & \text{pour } \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

5.3 Equation de la chaleur 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

5.3.1 Adaptation des schémas 1D

Les techniques utilisées précédemment posent des difficultés. Voyons deux exemples significatifs :

1. Simple schéma explicite :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right]$$

Pour résoudre l'évolution du système, on pose le schéma sous la forme :

$$u_{i,j}^{n+1} = Au_{i,j}^n + Bu_{i+1,j}^n + Cu_{i-1,j}^n + Du_{i,j+1}^n + Eu_{i,j-1}^n$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ B = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ C = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ D = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ E = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ i \in [1, I] \\ j \in [1, J] \end{array} \right.$$

On considère $i = \{1, 2, \dots, I\}$ et $j = \{1, 2, \dots, J\}$. Les conditions limites sont alors les $u_{0,j}, u_{I+1,j}, u_{i,0}, u_{i,J+1}$ que l'on considère comme des constantes (conditions limites de Dirichlet).

On constate que $B = C$ et $D = E$. Nous les différencions pour une meilleure compréhension de la méthode. On pose :

$$U^n = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{1,J} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{2,J} \\ \vdots \\ u_{I-1,J} \\ u_{I,1} \\ \vdots \\ u_{I,J} \end{pmatrix}$$

La forme matricielle du problème est alors :

$$U^{n+1} = MU^n + V$$

M est une matrice $(I * J, I * J)$. Elle a la forme d'une matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{M_c} & \boxed{M_d} & & & & & \\ \boxed{M_g} & \boxed{M_c} & \boxed{M_d} & & & & \\ & \boxed{M_d} & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \boxed{M_d} & \\ & & & & \boxed{M_g} & \boxed{M_c} & \end{pmatrix}$$

Chaque bloc est de taille $(J * J)$ et :

$$M_g = \begin{pmatrix} C & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C \end{pmatrix} \quad M_D = \begin{pmatrix} B & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B \end{pmatrix}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} A & D & & 0 \\ E & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & D \\ 0 & & E & A \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas 1D, le vecteur V de taille $(I * J)$ contient les conditions aux limites :

$$V = \begin{pmatrix} Cu_{0,1} + Eu_{1,0} \\ Cu_{0,2} \\ \vdots \\ Cu_{0,J} + Du_{1,J+1} \\ \hline Eu_{2,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Du_{2,J+1} \\ \hline Eu_{3,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Du_{I-1,J+1} \\ \hline Bu_{I+1,1} + Eu_{I,0} \\ Bu_{I+1,2} \\ \vdots \\ Bu_{I+1,J} + Du_{I,J+1} \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour résoudre ce genre de problèmes sous Matlab, il est intéressant de déclarer M comme une matrice creuse (sparse matrix). Dans un langage tel que le C ou Fortran on codera la matrice de façon *intelligente*. On ne rentrera que les bandes non nulles de la matrice et adaptera la multiplication matricielle au type de codage choisi.

La condition de stabilité de ce schéma est :

$$\alpha \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right] \leq \frac{1}{2}$$

En prenant $\Delta x = \Delta y$, la condition de stabilité est :

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Cette condition est encore plus restrictive que dans le cas 1D !

2. Schéma de Crank-Nicolson :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) (u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n)$$

avec les notations :

$$\delta_x^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

$$\delta_y^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

Ce schéma est inconditionnellement stable même en $2D$. On a cependant perdu la structure tridiagonale du système $1D$. Le système est de type :

$$au_{i,j-1}^{n+1} + bu_{i-1,j}^{n+1} + cu_{i,j}^{n+1} + bu_{i+1,j}^{n+1} + au_{i,j+1}^{n+1} = d_{i,j}^n$$

avec :

$$\begin{cases} a = -\frac{\alpha}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ b = \frac{\alpha}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ c = 1 + \alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \\ d_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \frac{\alpha \Delta t}{2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{i,j}^n \end{cases}$$

Pour résoudre le système, il est alors nécessaire d'inverser (schéma implicite oblige) une matrice de taille $(I * J, I * J)$. Il faut alors absolument utiliser un algorithme d'inversion adapté (ici Gauss-Seidel par exemple).

5.3.2 Méthode ADI

ADI signifie *Alternating Direction Implicit* (Peaceman, Rachford et Douglas 1955). Cette méthode rentre dans la catégorie des *méthode du pas fractionnaire* ou *méthode de splitting*. C'est un schéma implicite à deux pas. Il est de type prédiction-correction :

$$\text{Pas 1 : } \frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \alpha [\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{i,j}^n] \quad (\text{prédiction})$$

$$\text{Pas 2 : } \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \alpha [\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}] \quad (\text{correction})$$

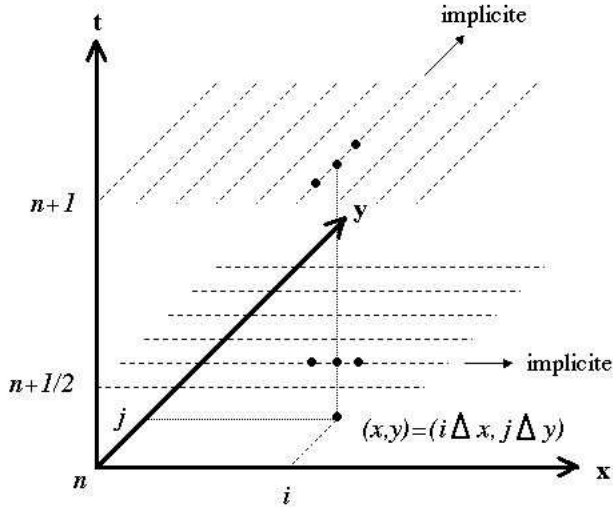
avec les mêmes notations que précédemment :

$$\delta_x^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

$$\delta_y^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

On avance d'une moitié de pas à chaque fois. A chaque demi pas, les terme implicites ($n + 1/2$ au pas 1 et $n + 1$ au pas 2) ne portent que sur une des deux dimensions (ici x au pas 1 et y au pas 2). Nous avons vu dans l'exemple précédent (schéma de Cranck Nicolson $2D$) que résoudre le problème de manière implicite sur \vec{e}_x et \vec{e}_y à la fois demande l'inversion d'une matrice diagonale par blocs. Avec la méthode ADI, on inverse deux fois une matrice tridiagonale ce qui est algorithmiquement préférable. On utilisera ici l'algorithme de Thomas par exemple.

La méthode ADI a une erreur de troncature d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ et est inconditionnellement stable.



Il existe évidemment d'autres méthodes comme la méthode ADE, la méthode *Keller Box*... En général, les méthodes implicites sont recommandées car leur stabilité est meilleure.

5.4 Equation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation est un modèle pour les équations de Navier Stokes incompressibles et stationnaires (équations elliptiques) et aussi pour les écoulements potentiels (irrotationnel, non-visqueux et incompressible). Dans les équations de N-S incompressibles, on arrive souvent une équation de Poisson pour la pression en prenant la divergence de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = f(x, y)$$

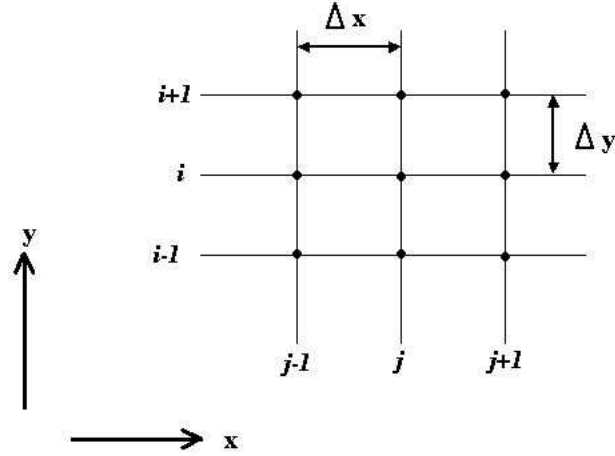
5.4.1 Formule à cinq points

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

l'erreur de troncature est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2)$ et l'équation modifiée est :

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{12}[u_{xxxx}(\Delta x)^2 + u_{yyyy}(\Delta y)^2] + \dots$$

Une formule à 9 points peut être générée facilement avec comme erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4)$.



Toutefois, l'erreur de troncature diminue rapidement pour les équations elliptiques plus générales, et il est de plus difficile de garder la précision près d'une frontière.

Supposons une grille uniforme ($\Delta x = \Delta y$) avec un nombre de points égal suivant les x et le y ($=N$).

L'équation aux différences s'écrit :

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

pour chaque point où la solution (i, j) est recherchée.

Si les C.L. sont de type Dirichlet et la solution est connue sur les quatre frontières, alors il reste N^2 points où la solution n'est pas connue. Pour chaque point, on écrit l'équation aux différences. On a donc N^2 équations linéaires algébriques pour les N^2 inconnues :

$$[A][\vec{U}] = [\vec{C}]$$

La matrice $[A]$ (de taille $(N^2 * N^2)$) contient beaucoup de zéros ! Pour résoudre ce système, on peut utiliser une méthode directe (Gauss, Choleski...) ou une méthode itérative (Gauss-Seidel, surrelaxation, ADI).

5.5 Equation de transport 1D (linéaire)

L'équation de transport (convection-diffusion) monodimensionnelle est :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

Cette équation est aussi connue sous le nom de *équation de Burgers Linéarisée*. Le scalaire S y est convecté à la vitesse $u = \text{const}$ et y est diffusé par le coefficient de diffusion ϵ . Cette

équation, qui est parabolique, peut être un modèle pour l'équation de la couche limite. Elle nécessite les mêmes C.I. et C.L. que l'équation de la chaleur, i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{C.I. :} \\ \text{Deux C.L. :} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} s(x, 0) = s_0(x) \\ s(x_0, t) = a(t) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial s}{\partial x}(x_0, t) = b(t) \\ s(x_f, t) = c(t) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial s}{\partial x}(x_f, t) = d(t) \end{array} \right.$$

5.5.1 Schéma explicite FTCS (Roache 1972)

FTCS signifie *forward in time, centered in space*

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\Delta t} + u \frac{s_{i+1}^n - s_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\epsilon}{\Delta x^2} [s_{i+1}^n - 2s_i^n + s_{i-1}^n]$$

L'erreur de troncature est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$. Par élimination des dérivées temporelles, on obtient l'équation modifiée :

$$s_t + us_x = \underbrace{\left[\frac{\epsilon u^2 \Delta t}{2} \right]}_{\text{dissipation artificielle}} s_{xx} + \underbrace{\frac{u \Delta x^2}{3} \left[3r - \nu^2 - \frac{1}{2} \right]}_{\text{dispersion artificielle}} s_{xxx} + \frac{u \Delta x^3}{12} \left[\frac{r}{\nu} - \frac{3r^2}{\nu} - 2\nu + 10\nu r - 3\nu^3 \right] s_{xxxx} + \dots$$

avec :

$$\nu = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad (\text{nombre de courant}) \quad \text{et} \quad r = \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Warming et Hyett ont montré que pour avoir stabilité, une **condition nécessaire** est que le coefficient du terme s_{xx} soit supérieur à 0 soit :

$$\nu^2 \leq 2r$$

On introduit alors le *nombre de Reynolds de maille* (grid Reynolds number) tel que :

$$Re_{\Delta x} = \frac{u \Delta x}{\epsilon} \sim \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}}$$

On montre facilement que :

$$Re_{\Delta x} = \frac{\nu}{r}$$

La condition nécessaire de stabilité est donc :

$$Re_{\Delta x} \leq \frac{2}{\nu}$$

Le nombre de Reynolds de maille est d'un grand intérêt pour la résolution d'équation de transport par un schéma d'ordre deux. Une analyse de stabilité de Von Neumann nous montre une autre condition :

$$\nu^2 \leq 2r \quad \text{et} \quad r \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit que $\nu \leq 1$ ce qui se traduit par :

$$2\nu \leq Re_{\Delta x} \leq \frac{2}{\nu}$$

remarque : Ce schéma produit des *wiggles* (erreurs de phase) importants pour $2\nu \leq Re_{\Delta x} \leq 2/\nu$. Pour $Re_{\Delta x} > \frac{2}{\nu}$, les oscillations causent l'explosion de la solution. Pour éliminer les *wiggles*, la meilleure solution est de raffiner la grille surtout dans la (les) région(s) contenant beaucoup d'oscillations. On peut aussi penser utiliser un schéma décentré régressif (sur le terme convecté). Cette solution est à éviter car on additionne trop de viscosité numérique à la solution d'où une perte de précision.

5.5.2 Schéma implicite de Crank-Nicolson

Les schémas implicites sont efficaces pour éliminer la restriction $r = \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$. Le schéma est :

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\Delta t} + 0.5u \left[\frac{s_{i+1}^n - s_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] = 0.5\epsilon \left[\frac{s_{i+1}^n - 2s_i^n + s_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{s_{i+1}^{n+1} - 2s_i^{n+1} + s_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right]$$

L'erreur de troncature est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Il n'y a pas de restriction liée à la stabilité.

Pour éviter les wiggles, il faut que $Re_{\Delta x} \leq 2$. Pour des ν petits, on observe de petites erreurs de dispersion et de dissipation.

Finalement, ce schéma est un bon schéma qui nécessite l'inversion d'un système tridiagonal.

5.6 Equation de transport 2D

En 2D, l'équation de transport est sous la forme :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = \epsilon_x \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

On peut facilement construire un schéma FTCS. Cependant, l'analyse de stabilité de Von Neumann est plus restrictive en 2D pour ce schéma :

$$\begin{cases} (r_x + r_y) = (\epsilon_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \epsilon_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\nu_x^2}{r_x} + \frac{\nu_y^2}{r_y} \leq 2 \quad \text{avec} \quad (\nu_x = \frac{u\Delta t}{\Delta x}, \nu_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y}) \end{cases}$$

Pour $\epsilon_x = \epsilon_y$ et $\Delta y = \Delta x$ la première condition donne $r \leq 0.25$ ce qui est deux fois plus sévère qu'en 1D. De plus, les termes de dissipation artificielle sont liés au premier ordre de la dérivée temporelle. Enfin, si le vecteur vitesse $\vec{u} = (u, v)$ est à 45 degrés par rapport à la direction des coordonnées, il y a une très forte dissipation numérique.

Il est donc important d'utiliser une bonne précision temporelle.

5.7 Equation de Burgers non linéaire

Cette équation est un modèle pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Son écriture sous forme conservative est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\overline{F}}{x} = 0 \quad , \overline{F} = \frac{u^2}{2} - \mu u_x$$

Nous utiliserons plutôt la formulation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , F = \frac{u^2}{2}$$

La chose importante à remarquer est que maintenant, nous avons un **problème non linéaire**. Il est donc nécessaire d'appliquer une sorte de linéarisation, ou bien itérer (utiliser un schéma avec plusieurs pas).

5.7.1 Schéma implicite de Bridley-Mc Donald (1974)

Il s'agit ici d'un schéma, pour la résolution aux différences finies des équations compressibles de N.S. sous forme conservative. L'idée est de linéariser le terme $\frac{\partial F}{\partial x}$ en utilisant une série de Taylor tronquée :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{n+1} = \mu \delta_x^2 u_i^{n+1}$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{n+1} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^n + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} \right]_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &\simeq \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^n + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} \right]_i^n \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^n + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]_i^n \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^n + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]_i^n \\ &= \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) - u_{i-1}^n (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} \end{aligned}$$

Ici, l'erreur de troncature est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ pour le schéma complet. Nous obtenons donc un système linéaire d'équations algébriques pour le temps $n + 1$ ce qui donne un système tridiagonal. Ce schéma est inconditionnellement stable. La précision temporelle peut être améliorée par le schéma suivant (inconditionnellement stable et d'E.T. d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$) :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^n + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{n+1} \right] = \\ \frac{1}{2} \mu [\delta_x^2 u_i^n + \delta_x^2 u_i^{n+1}] \end{aligned}$$

Remarque : si le schéma de Bridley- Mc Donald est utilisé directement pour l'équation de Burgers $2D$, on n'obtient pas un système d'équations algébriques tridiagonal. Une solution est d'utiliser la procédure ADI à deux pas.

Chapitre 6

Résolution numérique de Navier-Stokes incompressible

6.1 Présentation

On considère ici l'équation de Navier-Stokes en *variables primitives* (i.e. avec \vec{u} et p comme variables) sous forme adimensionnelle. L'écoulement est incompressible :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 & \text{(équation de continuité)} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} & \text{(équation de mouvement)} \end{cases}$$

Soit Ω le domaine et Γ la frontière. Pour les C.L., \vec{u} est donné sur Γ et pour les C.I., $\vec{u}(0)$ est donné sur Γ sous la contrainte $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Il existe une contrainte sur les C.L. due à l'équation de continuité :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dA = 0 \text{ soit } \oint_{\Gamma} \vec{u} \cdot \vec{n} dl = 0$$

Cette condition interprète le fait que l'écoulement entrant est égal à l'écoulement sortant à la frontière (conservation de la masse).

En résolvant l'équation d'évolution de t à $t + \Delta t$, on tombe sur deux problèmes :

1. On ne trouve pas forcément $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(t + \Delta t) = 0$.
2. Quelles sont les conditions limites pour p ?

6.2 Ecoulement stationnaire

6.2.1 Méthode de la compressibilité artificielle

Cette méthode est dédiée à la résolution des équations de N.S. **stationnaires** :

$$\begin{cases} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Elle se caractérise par :

1. Introduction d'un temps fictif τ . On a \vec{u} et p qui dépendent de τ .
2. On se ramène au problème compressible (la solution stationnaire reste incompressible !):

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \tau} + c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \end{cases}$$

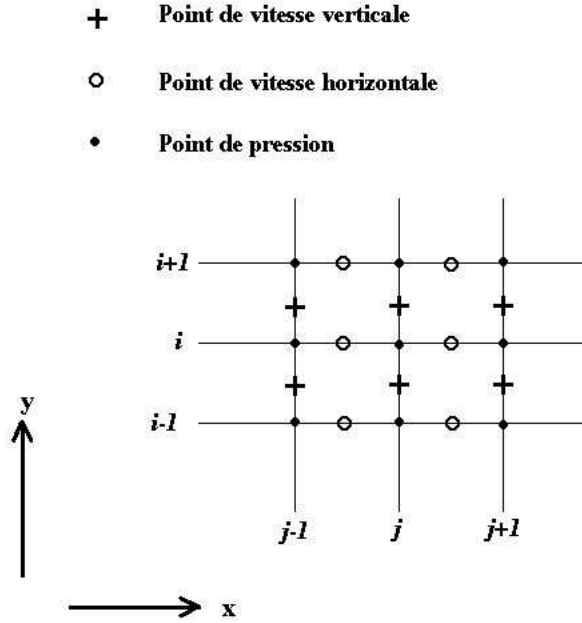
Les équations sont du type hyperbolique-parabolique. Ici, la **transitoire n'est pas physique** mais (on l'espère) l'état stationnaire est bon !

Le paramètre c^2 est arbitraire. Il est choisi de manière optimale pour assurer une convergence rapide. Il s'agit en effet d'une *vitesse du son artificielle*

La résolution peut s'effectuer avec une méthode numérique adaptée : La méthode MAC.

6.2.2 Méthode Marker And Cell (MAC)

Cette méthode tire ses origines dans *Harlow & Welch 1965* et *Welch & al 1966*. Elle utilise un maillage décalé. La pression, la vitesse suivant X et la vitesse suivant Y ne sont pas calculées aux mêmes points.



L'équation sous forme discrète, pour une discrétisation de type Jacobi (explicite) peut s'écrire sous la forme :

– Vitesse suivant X :

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n}{\Delta\tau} + u_{i+1/2,j}^n \frac{u_{i+3/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{2\Delta x} \\ & + \frac{1}{4} (v_{i+1,j+1/2}^n + v_{i+1,j-1/2}^n + v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n) \frac{u_{i+1/2,j+1}^n - u_{i+1/2,j-1}^n}{2\Delta y} \\ & + \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} = \frac{1}{Re} \left[\frac{u_{i+3/2,j}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+1/2,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \end{aligned}$$

– Vitesse suivant Y :

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n}{\Delta\tau} + v_{i,j+1/2}^n \frac{v_{i,j+3/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{2\Delta y} \\ & + \frac{1}{4} (u_{i+1/2,j+1}^n + u_{i-1/2,j+1}^n + u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n) \frac{v_{i+1,j+1/2}^n - v_{i-1,j+1/2}^n}{2\Delta x} \\ & + \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{v_{i,j+3/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y^2} + \frac{v_{i+1,j+1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i-1,j+1/2}^n}{\Delta x^2} \right] \end{aligned}$$

– Masse :

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta\tau} + c^2 \left[\frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \right] = 0$$

Un schéma de Gauss-Seidel converge plus rapidement. Son écriture est la même que Jacobi en remplaçant les n par des $n + 1$ dans les termes en espace.

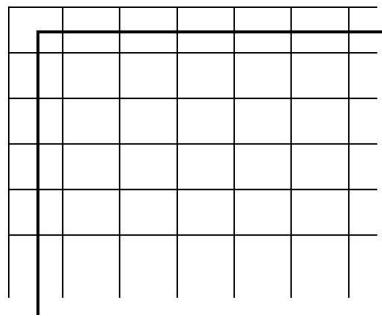
Au niveau de la frontière du domaine, on a un problème. Des points nécessaires pour le calcul sont à l'extérieur du domaine physique (classique).

Ici, on résoud le problème de cette sorte :

- On ne prend pas en compte les points de pression sur la frontière. Les conditions de pression n'y sont pas nécessaires.
- Pour respecter la condition d'adhérence pour la vitesse, on procède avec (en supposant que les parois sont fixes) :

$$\begin{cases} v_{i,j+1/2} = 0 \\ u_{i+1/2,j+1} = -u_{i+1/2,j} \end{cases}$$

La deuxième ligne exprime une *technique de réflexion*. Elle exprime le fait que la vitesse est nulle sur la paroi (ici en $u_{i+1/2,j+1/2}$) :



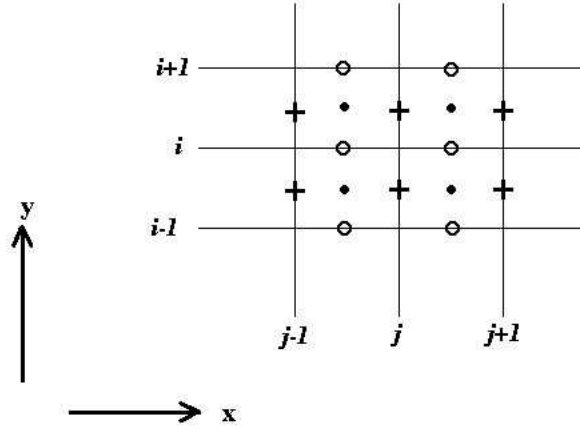
Frontière du domaine physique

En effet dans le schéma on aura :

$$u_{i+1/2,j+1/2} \approx \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1}}{2} = 0$$

On peut aussi résoudre le problème en utilisant un autre maillage : on met la pression au centre de la cellule, et on fait coïncider la grille avec le domaine (et sa frontière) :

- + Point de vitesse verticale
- Point de vitesse horizontale
- Point de pression



En général, l'avantage de la grille décalée est qu'il n'y a pas de couplage entre vitesse et pression. De plus, on n'a pas besoin d'une condition de pression sur la frontière. En effet, pour une frontière solide, cette condition s'écrit :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p = \vec{n} \cdot \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \cdot \vec{n}$$

Cette C.L. pour p est satisfaite de manière implicite par le schéma MAC (l'approximation d'une couche limite est : $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$). On peut noter que si on prend la composante tangentielle des équations de Navier-Stokes à la frontière, $\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} p = \vec{\tau} \cdot \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}$ soit $\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \nabla^2 (\vec{u} \cdot \vec{\tau})$, on a une autre C.L. pour p :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Composante normale : } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} v_{yy} \\ \text{Composante tangentielle : } \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} u_{yy} \end{array} \right.$$

On a donc redondance des conditions limites.

6.2.3 Stabilité du schéma MAC

On ne peut pas analyser la stabilité d'un schéma pour une équation non linéaire, il est nécessaire d'en faire une approximation. On linéarise l'équation sous forme non-conservative ($uu_x + vv_y = u_0u_x + v_0v_y$) avec u_0 et v_0 des constantes, on élimine le *décalage* des cellules et on *oublie* la pression :

$$\underbrace{\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta \tau}}_{\text{Euler progressif}} + u_0 \delta_x u_{i,j}^n + v_0 \delta_y u_{i,j}^n = \frac{1}{Re} (\delta_x^2 u_{i,j}^n + \delta_y^2 u_{i,j}^n)$$

Tout comme dans le chapitre 5, δ_x représente les différences centrées. On suppose l'erreur de la forme :

$$\epsilon_{i,j}^n = G^n e^{ipx+iqy}$$

alors :

$$\begin{aligned}\delta_x \epsilon_{i,j}^n &= \frac{\epsilon_{i+1,j}^n + \epsilon_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ &= \frac{G^n e^{iqy_j} (e^{ipx_{i+1}} - e^{ipx_{i-1}})}{2\Delta x} \\ &= \frac{G^n e^{ipx_i + iqy_j}}{\Delta x} \underbrace{\frac{e^{ip\Delta x} - e^{-ip\Delta x}}{2}}_{i \sin(p\Delta x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{xx} \epsilon_{i,j}^n &= \frac{\epsilon_{i+1,j}^n - 2\epsilon_{i,j}^n + \epsilon_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ &= \frac{G^n e^{ipx_j + iqy_j} (e^{ip\Delta x} - 2 + e^{-ip\Delta x})}{\Delta x^2} \\ &= \frac{G^n e^{ipx_i + iqy_j}}{\Delta x^2} \left(-4 \sin^2\left(\frac{p\Delta x}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

et :

$$\frac{\epsilon_{i,j}^{n+1} - \epsilon_{i,j}^n}{\Delta \tau} = \frac{G-1}{\Delta \tau} G^n e^{ipx_i + iqy_j}$$

Finalement, avec l'hypothèse $\Delta x = \Delta y$ et en prenant $\xi = p\Delta x$ et $\eta = q\Delta y$, on a :

$$\frac{G-1}{\Delta \tau} + \underbrace{\frac{u_0}{\Delta x} i \sin \xi + \frac{v_0}{\Delta y} i \sin \eta}_{\text{Imaginaire}} = \underbrace{-\frac{4}{\Delta x^2} \text{Re} \left(\sin^2 \frac{\xi}{2} + \sin^2 \frac{\eta}{2} \right)}_{\text{Réel}}$$

donc :

$$|G|^2 = \left| 1 - \frac{4}{\text{Re} \Delta x^2} \Delta \tau \left(\sin^2 \frac{\xi}{2} + \sin^2 \frac{\eta}{2} \right) \right|^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 |u_0 \sin \xi + v_0 \sin \eta|^2$$

Il y a évidemment une limite sur la longueur d'onde que l'on peut *capturer* numériquement avec un maillage donné ; il faut au moins deux intervalles Δx pour capturer une onde (th. de Shannon).

Soit k le nombre d'onde, on a alors comme longueur d'onde $\frac{2\pi}{k}$ et :

$$2\Delta x \leq \frac{2\pi}{k} \leq L$$

avec L la longueur du domaine selon x . Ainsi :

$$k\Delta x = \xi \leq \pi$$

On choisi donc la valeur maximale de ξ et η comme :

$$\xi = \eta = \pi$$

dans ce cas :

$$|G|^2 = \left| 1 - \frac{4}{\text{Re} \Delta x^2} \Delta \tau \cdot 2 \right|^2$$

Le schéma est alors stable si :

$$-1 \leq 1 - \frac{8}{Re} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq 1$$

$$-2 \leq -\frac{8}{Re} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq 0$$

soit :

$$\frac{4}{Re} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq 1$$

Si on avait choisi pour ξ et η :

$$\xi = \eta = \frac{\pi}{2}$$

on aurait eu :

$$|G|^2 = \left| 1 - \frac{4}{Re} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \right|^2 + \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta x} \right)^2 |u_0 + v_0|^2 \leq 1$$

pour la stabilité, soit :

$$1 - \frac{4}{Re} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \left(2 - \frac{4}{Re} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta x} \right)^2 |u_0 + v_0|^2 \leq 1$$

En majorant le terme à gauche et en simplifiant, on a :

$$2 - \frac{4}{Re} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta x} \right)^2 |u_0 + v_0|^2 \geq 0$$

donc :

$$\frac{1}{4} Re \Delta\tau |u_0 + v_0|^2 \leq 1$$

Cette condition donne la limite de **stabilité convective**.

Les deux limites trouvées doivent être satisfaites. Une troisième analyse de stabilité peut être effectuée en éliminant le terme non-linéaire et en cherchant à calculer la stabilité de *l'écoulement de Stokes*. Dans ce cas, on peut trouver :

$$4 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{Re} + \frac{\Delta\tau c^2}{2} \right) \leq 1$$

et on trouve une méthode sur c^2 .

Une petite remarque avant de terminer cette section. Dans la section suivante, on trouve la méthode *fonction de courant, vorticité* qui peut s'appliquer pour des écoulements stationnaires avec une méthode similaire à celle de la compressibilité artificielle.

6.3 Écoulement instationnaire

6.3.1 Méthode de projection

Pour la résolution des équations de Navier Stokes **instationnaires**, une méthode explicite au pas fractionnaire et d'ordre 1 en temps est la méthode de projection :

– **Pas 1** : On pose N.S. sans pression :

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \Big| ^n = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}^n$$

– **Pas 2** : On obtient la pression par l'équation :

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*$$

Cette équation produit un champ de vitesse à divergence nulle :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} &= \vec{\nabla} \cdot [\vec{u}^* - \Delta t \vec{\nabla} p] \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^* - \Delta t \nabla^2 p \equiv 0 \end{aligned}$$

– **Pas 3** : On calcule :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\vec{\nabla} p^{n+1}$$

En éliminant \vec{u}^* dans le pas 1 et le pas 3, on retrouve bien :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\Delta t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \Big|_n = -\vec{\nabla} p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}^n$$

Les C.L. pour la pression doivent satisfaire une relation de *compatibilité*. Soit Ω le domaine et Γ la frontière, alors le deuxième pas implique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 p^{n+1} dA &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^* dA \\ \text{donc : } \oint_{\Gamma} \vec{\nabla} p^{n+1} \cdot \vec{n} dl &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^* dA \end{aligned}$$

Cette relation est la relation de compatibilité.

On obtient aussi, depuis le pas 3 :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} \cdot \vec{n} = -\vec{\nabla} p^{n+1} \cdot \vec{n}$$

donc :

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = -\frac{1}{\Delta t} [\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*] \cdot \vec{n}$$

C'est une condition de Neumann de pression. Par intégration sur Γ , on obtient :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} dl &= \underbrace{-\frac{1}{\Delta t} \oint_{\Gamma} \vec{u}^{n+1} \cdot \vec{n} dl}_{= -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} dA = 0} + \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \oint_{\Gamma} \vec{u}^* \cdot \vec{n} dl}_{\text{la discrétisation spatiale}} \\ &\quad \text{doit permettre à ce que} \\ &\quad \text{cette condition soit} \\ &\quad \text{toujours satisfaite} \end{aligned}$$

En pratique :

- **Pas 1** : On calcule \vec{u}^* aux points intérieurs mais pas à la frontière ($\Omega - \Gamma$). On impose \vec{u}_{Γ}^* quelconque sur la frontière. Un bon choix est $\vec{u}_{\Gamma}^* = \vec{u}_{\Gamma}^{n+1}$
- **Pas 2** : On calcule p sur Ω et impose $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$. C'est l'approximation d'une couche limite sur une paroi solide. Si la frontière n'est pas une paroi, il faut itérer entre le pas 2 et le pas 3.
- **Pas 3** : On calcule alors \vec{u}^{n+1} sur Ω avec $\vec{u}_{\Gamma}^{n+1} = \vec{u}_{\Gamma}^*$ pour garder $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$ et $\oint_{\Gamma} \vec{u}_{\Gamma} \cdot \vec{n} dl = 0$.

La méthode **explicite** impose des limitations sévères sur le pas de temps, aussi bien du point de vue visqueux que du non visqueux. Il est donc recommandé d'utiliser des schémas implicites.

6.3.2 Méthode de projection implicite

Nous étudions ici la méthode de projection implicite d'Adam-Bashforth - Crank-Nicolson. Cette méthode est d'ordre deux en temps et centrée sur $n + \frac{1}{2}$. Elle s'écrit :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \Big|^{n+1} - \frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \Big|^{n-1} + \vec{\nabla} p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2Re} \nabla^2 [\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^n]$$

- L'évaluation du **terme non linéaire** est explicite (Adam-Bashforth). Elle est effectuée par un développement de Taylor du style :

$$\begin{aligned} a(n) &= a(n + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ a(n-1) &= a(n + \frac{1}{2}) - \frac{3\Delta t}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \frac{3}{2}a(n) - \frac{1}{2}a(n-1) &= a(n + \frac{1}{2}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

- L'évaluation du **terme visqueux** est normalement soumise à des restrictions sévères. L'évaluation implicite (avec Crank-Nicolson) améliore les choses. Pour la résolution, on utilise une méthode de *splitting* (à plusieurs pas) :

- **Pas 1** : On s'occupe de la partie explicite :

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \Big|^{n+1} - \frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \Big|^{n-1} = \frac{1}{2Re} \nabla^2 \vec{u}^n$$

Les \vec{u}_Γ^* sont arbitraires comme dans le schéma précédent.

- **Pas 2** : La pression est gérée ici :

$$\nabla^2 p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*$$

avec :

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} = - \left[\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} - \frac{1}{2Re} \nabla^2 \vec{u}^{n+1} \right]_\Gamma \cdot \vec{n}$$

- **Pas 3** :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\vec{\nabla} p^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \vec{u}^{n+1}$$

donc :

$$\underbrace{\left(I - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 \right)}_{\text{matrice ou opérateur}} \underbrace{\vec{u}^{n+1}}_{\text{inconnu}} = \underbrace{\vec{u}^* - \Delta t \vec{\nabla} p}_{\text{connu}}$$

En pratique, la C.L. pour le pas 2 viens du pas 3 même si \vec{u}^* est arbitraire, on a une condition sur p implicite qu'il faut résoudre **par itération**. Par exemple :

- **Pas 1** : On a \vec{u}^n ; on obtient \vec{u}^* explicitement. L'initialisation de \vec{u}_k se fait par $\vec{u}_{k=0} = \vec{u}^n$. Quand à \vec{u}_Γ^* , il est arbitraire.

- **Pas 2 et 3** : Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ au temps $n+1$, on calcule $p^{n+\frac{1}{2}}$ et \vec{u}^{n+1} simultanément :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} \nabla^2 p_k^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^* \\ \frac{\partial p_k}{\partial n} \Big|_\Gamma &= - \left[\frac{\vec{u}_k - \vec{u}^*}{\Delta t} - \frac{1}{2Re} \nabla^2 \vec{u}_k \right]_\Gamma \cdot \vec{n} \end{aligned} \right. \\ \frac{\vec{u}_{k+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} &= -\vec{\nabla} p_k + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \vec{u}_{k+1} \end{cases}$$

Il y a convergence si $|\vec{u}_{k+1} - \vec{u}_k| < \epsilon$ pour chaque pas de temps n .

– On retourne ensuite au pas 1.

Une autre classe de méthodes pour traiter le problème incompressible est connue sous le nom de *correction de pression* (ou méthode SIMPLE).

6.3.3 Méthode SIMPLE

La famille des méthodes SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations par Caretto et al.*, 1972) est une autre approche de la correction de pression.

Cette procédure est basée sur une série d'opérations d'estimation - correction. La vitesse est tout d'abord calculée à partir de l'équation de continuité en faisant une estimation sur le champ de pression. La pression et la vitesse sont ensuite corrigés pour satisfaire la continuité. On répète ce processus jusqu'à la convergence. La différence entre cette méthode et le méthode MAC ou bien les méthode de projection est la manière dont on corrige la pression et la vitesse.

Dans cette procédure, on pose la pression réelle p telle que :

$$p = p_0 + p' \quad (1)$$

avec p_0 la valeur estimée de la pression et p' la correction sur la pression. De la même manière, la vitesse réelle s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u' \\ v &= v_0 + v' \end{aligned} \quad (2)$$

On relie les corrections sur la pression et la vitesse à partir d'une approximation de l'équation de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial v'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned}$$

En considérant la correction de pression comme nulle à l'itération précédente et $\Delta x = \Delta y$, on a :

$$\begin{aligned} u' &= -A \frac{\partial p'}{\partial x} \\ v' &= -A \frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

avec $A = \frac{\Delta x}{\rho} = \frac{\Delta y}{\rho}$.

En combinant les équations (2) et (3), on obtient :

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + A \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) = 0$$

soit :

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{A} (\nabla \cdot V_0) \quad (4)$$

où V_0 est le vecteur d'estimation de la vitesse. On a alors une équation de Poisson à résoudre. On pourra utiliser l'algorithme de Gauss-Seidel pour la résoudre. On peut aussi résoudre l'équation par une évolution de l'algorithme (Raithly & Schneider 1979) :

1. Estimation de p_0 en chaque point du maillage.
2. Résolution de l'équation d'évolution pour trouver (u_0, v_0) .
3. Résolution de l'équation de correction de pression (4) pour trouver p' en chaque point.
4. Correction de la pression et la vitesse en utilisant (1) et (3) :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p' \\ u &= u_0 - \frac{A}{2\Delta x}(p'_{i+1,j} - p'_{i-1,j}) \\ v &= v_0 - \frac{A}{2\Delta y}(p'_{i,j+1} - p'_{i,j-1}) \end{aligned}$$

5. Remplacer les valeurs intermédiaires (p_0, u_0, v_0) par les valeurs corrigées (p, u, v) et retourner au deuxième pas. Répéter ce processus jusqu'à la convergence du schéma.

On pourra remarquer que p' tend à être surestimé. On utilise alors souvent $p = p_0 + \alpha_p p'$ à la place de (1) où α_p est un coefficient de sous relaxation.

6.3.4 Fonction de courant, vorticité

Présentation

En dimension deux, il est avantageux d'utiliser une formulation *fonction de courant - vorticité*. Dans cette approche, on applique un changement de variables qui remplace les composantes de vitesse par la vorticité ω et la fonction de courant ψ . On n'a donc pas à un schéma en variables primitives comme précédemment. Soit $\vec{u} = (u, v)'$ la vitesse ; l'équation de transport visqueux est alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \\ \nabla^2 \psi = -\omega \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

L'équation en première ligne est parabolique et celle en deuxième ligne est elliptique. On peut noter que le terme $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ a disparu car $\vec{\nabla}\vec{u}$ est dans le plan x, y et $\vec{\omega}$ est selon z .

A chaque pas de t , il faut résoudre une équation de Poisson, ce qui est coûteux. Si on cherche seulement l'état stationnaire, on peut utiliser une méthode similaire à celle de la compressibilité artificielle. C'est la *méthode pseudo-stationnaire* :

Méthode pseudo-stationnaire (Mallinson & Vahl Davis 1973)

On y résoud :

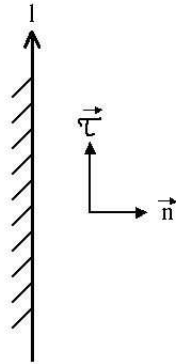
$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha(\nabla^2 \psi + \omega) \quad , \alpha > 0 \end{cases}$$

Les deux équations sont paraboliques. α est un paramètre de relaxation nécessaire pour la convergence du schéma. La variable t représente, ici, un temps fictif. Pour la résolution, on peut

choisir pour une méthode implicite (ADI par exemple) ou explicite.

Pour les conditions limites, on nomme Ω le domaine et Γ la frontière sur laquelle \vec{u} est connu (\vec{u}_Γ).

– **Conditions Limites pour la fonction de courant :**



Dans le cas des conditions limites, on interprète $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y} = u$ par :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\Big|_{\Gamma} = \vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \vec{u}_\Gamma \cdot \vec{\tau}$$

On a :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} dl = \psi + \text{const}$$

On néglige la constante. Soit la fonction f telle que :

$$f(x, y) = \int_{\Gamma} \vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n} dl$$

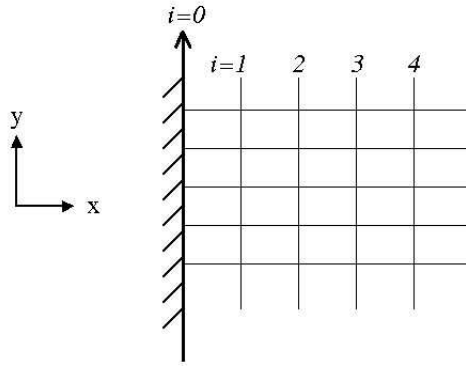
Ici, x et y correspondent à un noeud de l'espace discrétisé (l'intégrale est sur une partie de la frontière). Alors, sur Γ :

$$\psi = f(x, y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = g(x, y)$$

Avec $g(x, y) = -\vec{u}_\Gamma \cdot \vec{\tau}$. On a donc une condition de Dirichlet et une de Neumann. Evidemment, il faudra imposer seulement **une** de ces deux conditions.

– **Conditions Limites pour la vorticité**

La frontière solide crée de la vorticité pour maintenir l'adhérence du fluide   la paroi.



On a :

$$\omega_{\Gamma} = -(\nabla^2 \psi)_{\Gamma}$$

$$\psi_{0,j} = f_{0,j} \quad \text{Dirichlet}$$

On cherche :

$$\omega_{0,j} = -(\psi_{xx} + \psi_{yy})_{0,j}$$

Pour calculer $\omega_{0,j}$, il nous faut connaître ψ_{xx} et ψ_{yy} . On trouve ψ_{yy} facilement :

$$\psi_{yy} = f_{yy} \quad \text{sur } \tau \text{ (où } y \text{ est sur la frontière)}$$

Pour ψ_{xx} , on utilise un développement de Taylor :

$$\psi_{1,j} = \psi_{0,j} + \Delta x \underbrace{\psi_x}_{=g_{0,j} \text{ Neumann}} \Big|_{0,j} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \psi_{xx} \Big|_{0,j} + \dots$$

donc :

$$\psi_{xx} \Big|_{0,j} = \frac{2}{\Delta x^2} (\psi_{1,j} - \psi_{0,j} - \Delta x g_{0,j})$$

et ainsi :

$$\omega_{0,j} = - \left[\frac{2}{\Delta x^2} (\psi_{1,j} - \underbrace{\psi_{0,j}}_{f_{0,j}} - \Delta x g_{0,j}) + f_{yy} \right]$$

Il est aussi possible d'approximer $\omega_{0,j}$ par une autre méthode. On commence par écrire :

$$g_{0,j} = \frac{\psi_{1,j} - f_{0,j}}{\Delta x}$$

Cette égalité est seulement satisfaite à la convergence du schéma car avant, $\psi_{1,j}$ n'a pas la bonne valeur. On peut alors écrire comme C.L. sur ω à chaque pas de t (algorithme de descente avec γ comme paramètre de relaxation) :

$$\omega_{0,j}^{n+1} = \omega_{0,j}^n - \gamma \left[\frac{\psi_{1,j}^n - f_{0,j}}{\Delta x} - g_{0,j} \right]$$

A la convergence, on a :

$$\omega_{0,j}^{n+1} = \omega_{0,j}^n$$

et $\psi_{1,j}$ a la bonne valeur, et donc on a bien (correcte à l'ordre Δx) :

$$\frac{\psi_{1,j} - f_{0,j}}{\Delta x} = g_{0,j}$$

Chapitre 7

Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales sont un outil très puissant dans le cadre de la résolution numérique des EDP. Elles consistent à utiliser des changements d'espaces sur la fonction étudiée. Nous nous limiterons dans ce cours aux décompositions en séries de Fourier. Elles demandent des conditions aux limites périodiques sur un intervalle de longueur l .

7.1 Approximation pseudo-spectrale

On considère la fonction $u(x)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} aux points équirépartis $x_i = i \cdot \Delta x$ avec $i = 0, \dots, N - 1$. On suppose $u(x)$ périodique sur un intervalle de longueur $l = N \cdot \Delta x$. On a :

$$u(x_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k e^{2\pi i k x_j / l}$$

avec \tilde{a}_k les points dits de **collocation**. On peut visualiser les \tilde{a}_k comme le poids qu'a la fréquence k/l dans la fonction $u(x)$. Les \tilde{a}_k se calculent par la formule suivante :

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{l} \int_0^l u(x) e^{-2\pi i k x / l} dx \quad , \quad k = -\infty, \dots, \infty$$

En pratique, on ne peut pas calculer le poids d'une infinité de fréquences dans un signal discrétisé comme c'est le cas avec les $u(x_i)$. On ne pourra obtenir les \tilde{a}_k que pour $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$ sachant que $\tilde{a}_{-k} = \tilde{a}_k^*$ (avec \tilde{a}_k^* le conjugué de \tilde{a}_k) si $u(x)$ est dans \mathbb{R} . On considère alors $\tilde{P}_N u(x_j)$, l'approximation pseudo-spectrale de $u(x_j)$:

$$\tilde{P}_N u(x_j) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \tilde{a}_k e^{2\pi i k j / N}$$

où les termes \tilde{a}_k sont calculés par la formule suivante (on utilise la notation $u(x_j) = u_j$) :

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i k j / N} \quad , \quad \text{pour } k = -N/2 + 1, \dots, N/2$$

On parle d'approximation pseudo-spectrale et non spectrale quand N est fini. En effet, on considère comme négligeable le poids de toutes les fréquences que l'on aurait considérées en poussant N vers l'infini.

On peut alors calculer facilement l'approximation des dérivées n^{emes} de u_j :

$$\frac{d^n}{dx^n} \tilde{P}_N u_j = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} (2\pi i k / N)^n \tilde{a}_k e^{2\pi i k j / N}$$

Il requière $\mathcal{O}(N^2)$ calculs pour obtenir tous les $\frac{d^n}{dx^n} \widetilde{P}_N u_j$. Cet impact peut être largement réduit ($\mathcal{O}(N \log_2 N)$ calculs) si l'on utilise l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide. En comparaison, les approximations aux différences finies demandent $\mathcal{O}(N)$ calculs. On peut alors se demander quel est l'intérêt de l'approximation pseudo-spectrale. Il réside dans la qualité d'approximation des dérivées spatiales. Quand une méthode de différences finies classique crée une erreur d'approximation de la dérivée de l'ordre d'une puissance (faible) de Δx , le terme d'erreur sur une dérivée décroît exponentiellement avec N avec une approximation pseudo-spectrale. La qualité de la dérivation est incomparablement meilleure. On parle de méthode d'ordre supérieur.

7.2 Calcul pratique de l'approximation pseudo-spectrale des dérivées

On calcule les $\frac{d^n}{dx^n} \widetilde{P}_N u_j$ en les considérant comme le résultat de produits linéaires avec les valeurs de u_k . Soit :

$$U = U^{(0)} = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \text{ et } U^{(r)} = \begin{bmatrix} u_0^{(r)} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{(r)} \end{bmatrix}$$

où $u_k^{(r)}$ est l'approximation pseudo-spectrale de $\frac{d^r}{dx^r} u_k$. On souhaite écrire l'opérateur différentiel D tel que $U^{(r)} = D U^{(r-1)} = \dots = D^{(r)} U$. L'opérateur D est nommé matrice de différentiation pseudo-spectrale. On le construit en trois étapes :

1. A partir des u_i ($i = 0, \dots, N-1$), on calcule les \widetilde{a}_k ($k = -N/2 + 1, \dots, N/2$) en utilisant la transformée de Fourier. En prenant soin de convertir les indexes, cette opération est strictement équivalente à une multiplication matricielle $A = F_1 U$. Le nombre d'opérations est alors en $\mathcal{O}(N^2)$.
2. Calcul des termes spectraux des dérivées 1^{eres} en multipliant chaque a_k par $2\pi i k/l$. Cette opération est équivalente à un produit scalaire $A' = V A$ avec $V = [2\pi i(-N/2 + 1)/l, \dots, 2\pi i(N/2)/l]$. Le nombre d'opérations est ici en $\mathcal{O}(N)$.
3. A partir du résultat obtenu à l'étape précédente, on calcule les $\frac{d}{dx} \widetilde{P}_N u_i$ en utilisant une transformée de Fourier inverse. Comme à la première étape, cette opération est strictement équivalente à une multiplication matricielle par une matrice $\frac{d}{dx} \widetilde{P}_N U = F_2 A'$. Le nombre d'opérations est encore en $\mathcal{O}(N^2)$.

L'opérateur D vaut alors :

$$D = F_2 W F_1$$

avec W la matrice dont la diagonale est égale à V et les autres termes sont nuls.

L'opération est au final de complexité algorithmique N^2 ce qui est rédhibitoire pour de grandes valeurs de N . Comme cela a été évoqué dans la section précédente, en pratique, on réduit considérablement la complexité algorithmique de l'opération en utilisant la Transformée de Fourier Rapide (en Anglais Fast Fourier Transform ou FFT). Pour cela, N doit être une puissance de 2. Une transformée de Fourier passe d'une complexité $\mathcal{O}(N)$ à une complexité $\mathcal{O}(\log_2 N)$. La procédure de calcul de $\frac{d^r}{dx^r} u_k$ est alors la suivante :

1. A partir des u_i ($i = 0, \dots, N-1$), on calcule les \widetilde{a}_k ($k = -N/2 + 1, \dots, N/2$) en utilisant la FFT. Le nombre d'opérations est maintenant en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ avec N pour les N u_i et $\log_2 N$ pour la FFT.
2. Calcul des termes spectraux des dérivées $r^{èmes}$ en multipliant chaque a_k par $(2\pi i k/l)^r$. L'opération est toujours ici en $\mathcal{O}(N)$.

3. A partir du résultat obtenu à l'étape précédente, calcule des $\frac{d^r}{dx^r} \widetilde{P}_N u_j$ en utilisant une FFT inverse. Comme à la première étape, le nombre d'opérations est en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.

Au final, la complexité algorithmique est maintenant en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ ce qui est beaucoup plus raisonnable. On ne peut plus par contre considérer cette opération comme un produit matriciel mais plutôt comme une boîte noire, ce qui n'est pas bien gênant tant que les résultats sont les mêmes.

7.3 Méthodes pseudo-spectrales pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Ces méthodes sont aussi appelées méthodes de collocations.

On considère l'équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{cases} u_t = Su \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

où S est un opérateur différentiel spatial et u est considéré périodique. L'équation résolue est :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\widetilde{P}_N u) = S(\widetilde{P}_N u) \\ \widetilde{P}_N u(x, 0) = \widetilde{P}_N u_0(x) \end{cases}$$

Par exemple considérons l'équation d'une onde suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_x \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

La manière la plus simple d'exprimer ce que l'on fait est d'utiliser l'opérateur différentiel D vu à la précédente section (même si en pratique on utilisera la FFT ce qui est strictement équivalent au niveau du résultat). L'opérateur D se présente sous la forme d'une matrice. Soit $\widetilde{u}_k(0) = \widetilde{P}_N u(x_k, 0)$, alors l'équation est résolue en calculant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{U} = D \widetilde{U}$$

où :

$$\widetilde{U} = \begin{bmatrix} \widetilde{u}_0 \\ \vdots \\ \widetilde{u}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Pour le temps, on pourra par exemple utiliser la méthode d'Euler :

$$\frac{1}{\Delta t} (\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_0) = D \widetilde{U}_0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{U}_1 = (I + \Delta t D) \widetilde{U}_0$$

Pour résoudre n'importe quelle équation, on reproduit ce type de schéma. La résolution d'une équation non linéaire pose cependant un problème technique dû au phénomène d'aliasing que nous développons dans la section suivante.

7.4 L'anti-aliasing

L'aliasing est dû à la périodicité de période N des coefficients de Fourier :

$$\widetilde{a}_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i(k+N)j/N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-2\pi i(k)j/N} = \widetilde{a}_k.$$

Cette périodicité crée une équivalence entre un terme de fréquence comprise dans le spectre que l'on a défini pour reconstruire notre signal et une fréquence à l'extérieur de ce spectre. Prendre en considération une fréquence trop haute dans la reconstruction se traduit donc par la création d'un artefact de reconstruction.

Considérons maintenant le terme non linéaire $v(x)w(x)$ d'une EDP que l'on souhaite résoudre par une méthode pseudo spectrale. Son approximation pseudo spectrale est :

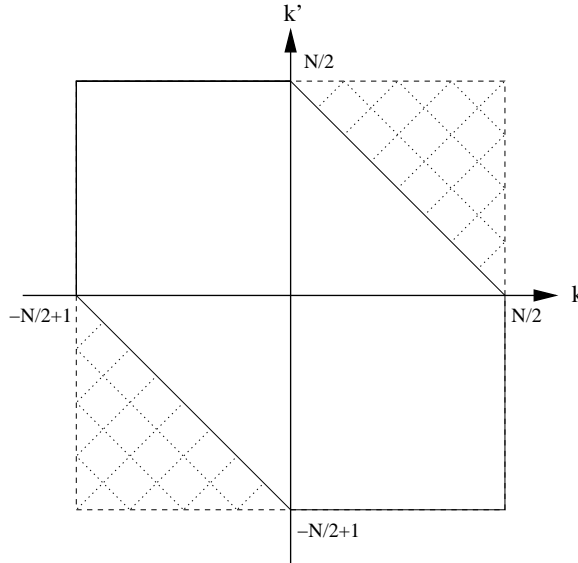
$$\widetilde{P}_N v(x_j)w(x_j) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \widetilde{v}_k e^{2\pi i k j/N} \sum_{k'=-N/2+1}^{N/2} \widetilde{w}_{k'} e^{2\pi i k' j/N}$$

Ce qui est aussi égal à :

$$\widetilde{P}_N v(x_j)w(x_j) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k'=-N/2+1}^{N/2} \widetilde{v}_k \widetilde{w}_{k'} e^{2\pi i(k+k')j/N}$$

Tant que $-N/2 + 1 \leq k + k' \leq N/2$, on n'a pas de problème. Par contre dès que l'on sort de ce domaine, on reconstruit des fréquences qui n'ont pas été prévues dans notre spectre. On crée alors un artefact de reconstruction. Si le signal étudié a été hautement échantillonné à la vue des fréquences qu'il contient, l'artefact peut être considéré comme négligeable. Cependant, dans le cas général un traitement anti-aliasing s'impose.

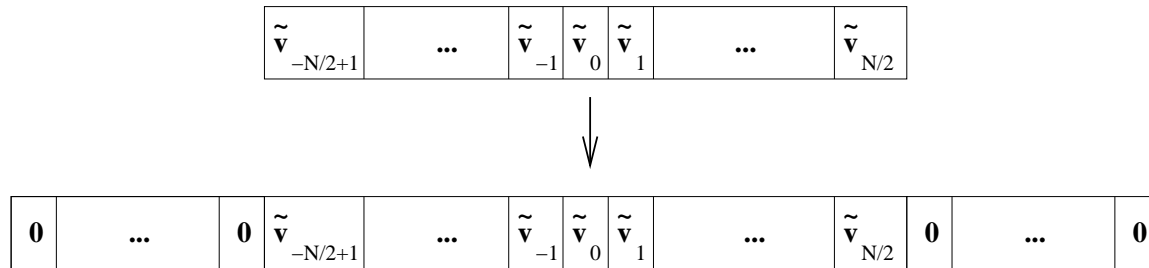
Tout d'abord, observons pour le couple (k, k') , $([k, k'] \in [-N/2+1, \dots, N/2]^2)$ les valeurs qui posent problème :



Les couples (k, k') créant un alias sont ceux pour lesquels $k + k' > N/2$ ou $k + k' < -N/2 + 1$. On pourrait pour traiter ces couples en utilisant la formule de transformation de

Fourier via produit matriciel en ajoutant un test sur les $k + k'$. Cependant, comme nous l'avons vu plus tôt, il est nettement plus avantageux en terme de temps de calculs d'utiliser des FFT. Ces dernières sont assimilées ici à des boîtes noires qu'on ne peut modifier. L'anti-aliasing doit alors s'effectuer ailleurs que dans la tranformation de Fourier.

Une solution largement utilisée est, une fois dans le domaine spectral, d'augmenter la taille de \tilde{v} et de \tilde{w} en rajoutant des 0 sur les hautes fréquences créées. Formellement, on part du spectre de \tilde{v} et de \tilde{w} avec k et k' compris entre $-N/2 + 1$ et $N/2$ pour créer un spectre avec k et k' compris entre $-M/2 + 1$ et $M/2$ (avec $M > N$) en rajoutant des 0 aux nouveaux indices.



Ceci revient mathématiquement à reconstruire le signal à partir des \tilde{v}_k et $\tilde{w}_{k'}$ existants avec un maillage plus fin puis de le repasser dans le domaine fréquentiel. Comme on peut le voir sur l'illustration suivante, il suffit de prendre $M = 3N/2$ pour éviter l'aliasing. En pratique on prendra le plus souvent $M = 2N$ car, la FFT demande des signaux discrets de la taille d'une puissance de 2. Le facteur $3/2$ sera toutefois utilisé dans certains cas car des versions dérivées de la FFT permettent d'effectuer une transformation de Fourier (ou de Fourier inverse) pour des signaux de dimension $2^m 3^n 5^p \dots$ (m, n, p des entiers). Elles sont cependant plus lentes que la FFT originale. Il y a donc un compromis à faire entre ce qui est gagné avec le coefficient $3/2$ et ce qui est perdu avec un algorithme un peu moins puissant.

Une fois cette opération réalisée, on peut sans risques d'aliasing, transformer notre produit $\tilde{P}_N v(x_j)w(x_j)$ dans le domaine spatial, via une FFT inverse. On se retrouve alors avec un signal sur-échantillonné (de manière artificielle), on a des $\tilde{P}_N y(x_j)$ avec $y(x_j) = v(x_j)w(x_j)$ pour $j \in 0, \dots, M - 1$. On transforme alors notre signal dans les domaines de Fourier puis le recompose pour dans l'intervalle $[-N/2 + 1, N/2]$ pour ne garder que les fréquences non artificielles.

Cette opération nous permet donc de pouvoir résoudre proprement et rapidement les problèmes non linéaires par des méthodes spectrales. Les multiples allers-retours entre domaines spatiaux et fréquentiels dûs à l'utilisation de FFT restent très compétitifs en terme de temps de calculs par rapport à une transformée de Fourier par produit matriciel.

Bibliographie

- John C. Tannehill, Dall A. Anderson, Richard H. Pletcher *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Ed. Taylor & Francis.
- C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Ed. Springer.
- Roger Peyret, Thomas D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*. Ed. Springer-Verlag.
- William H. Press & al. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press.

- D. Euvrard. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*. Ed. Masson

Je remercie particulièrement A. Bergeon, A. Bottaro, M. Zagzoule, X. Barthélemy, A. Dechaume, P.Assemat, C. Badufle qui m'ont bien aidé dans cette aventure qu'a été ce cours pour moi. Un gros merci aussi à mes élèves pour leurs remarques et questions qui m'ont permis de rendre l'ensemble plus clair.