Simulation Numérique - Projet : La cavité doublement entrainée

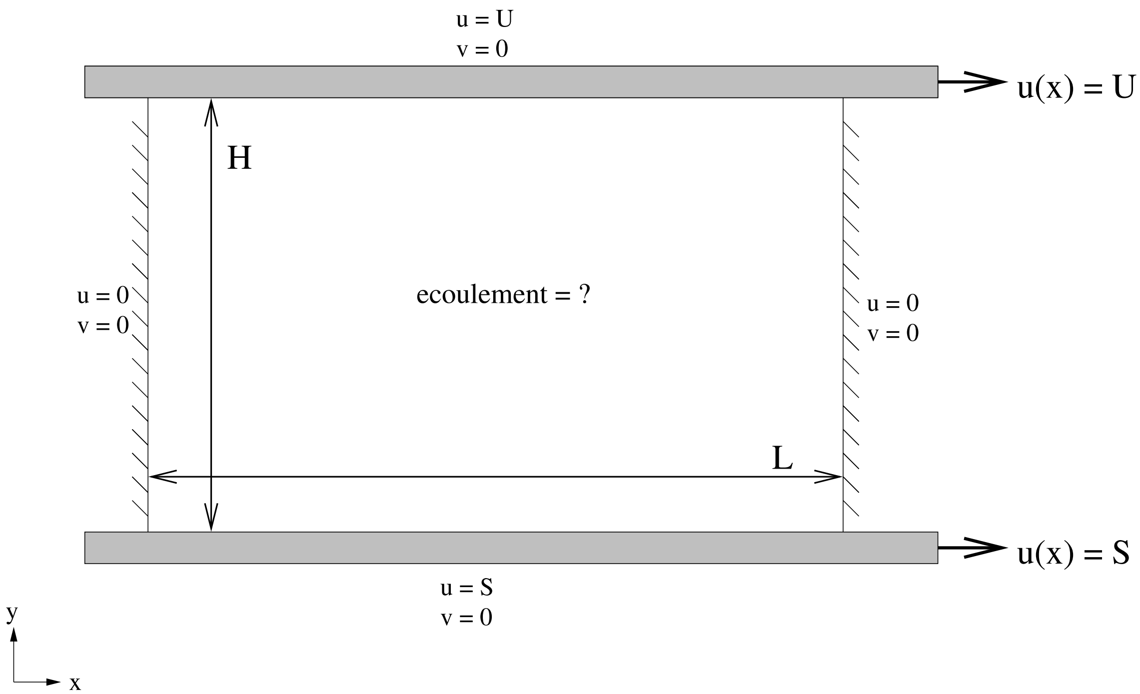
RISSER Laurent

7 février 2005

Présentation du projet

On souhaite résoudre les équations de Navier-Stokes 2D incompressible stationnaire dans une cavité doublement entrainée.

On considère la cavité dans un repère $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$. Elle mesure L cm sur l'axe $\vec{e_x}$ et H cm sur l'axe $\vec{e_y}$. Sur le haut, la cavitée est entrainée à la vitesse U dans la direction $\vec{e_x}$. Sur le bas, la cavitée est entrainée à la vitesse S toujours dans la direction $\vec{e_x}$:



On défini le nombre de Reynolds par :

$$Re = \frac{L.\{\max u(x)\}}{\nu}$$

en considérant que $L > H$.

Pour résoudre cette équation, on utilisera la méthode de fonction de courant - vorticité.

Fonction de courant, vorticité

En chaque point du domaine 2D, on considère le vecteur vitesse $\vec{V} = (u, v)$ et la pression p. Les équations de Navier-Stokes incompressibles 2D en coordonées cartésiennes sont alors définies par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big), \tag{2}$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

L'approche fonction de courant - vorticité a été une des méthodes les plus populaires pour résoudre les équations de N.S. incompressibles 2D. L'idée de base de cette méthode tient en un changement de variables. Les composantes u et v de la vitesse sont remplacés par les coefficients de vorticité ω et la fonction de courant ψ. La valeur de la vorticité 2D est définie par :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4}$$

La fonction de courant est définie par les équations :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \tag{5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \tag{6}$$

En utilisant ces variables dépendantes ainsi que les équations (1) et (2) on obtient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\Big) \tag{7}$$

Cette équation parabolique est nommée l'équation de transport visqueux. Une seconde équation peut être obtenue en substituant les équations (5) et (6) dans l'équation (4) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \tag{8}$$

Cette équation elliptique est l'équation de Poisson.

Grace aux changements de variables, on a pu isoler le terme de pression et diviser l'équation elliptique-parabolique 2D incompressible de Navier-Stokes en une équation parabolique et une équation elliptique.

Nous cherchons simplement un état stationnaire de l'écoulement avec des vitesses U et S constantes dans le temps. Les termes de dérivées sur le temps disparaissent donc. Cependant on va utiliser une méthode pseudo stationnaire pour résoudre l'équation, i.e. on va utiliser un terme de temps fictif τ et faire converger le schéma vers l'état stationnaire. Cette méthode s'inspire grandement de la méthode instationnaire. On résoud :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\omega = \frac{1}{Re}\nabla^2\omega \\ \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \alpha(\nabla^2\psi + \omega), \qquad , \qquad \alpha > 0 \end{cases} \tag{9}$$

Les deux équations sont ici paraboliques. α est un paramètre de relaxation nécessaire à la convergence du schéma. On utilisera une méthode ADI (Alternating Direction Implicit) pour résoudre le problème.

Traitement de l'intérieur du domaine

Soit Ω le domaine et Γ la frontière sur laquelle $\vec{V}$ est connu ($\vec{V_\Gamma}$).

Sachant que $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$ et que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, l'équation à résoudre est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \alpha\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \alpha\omega = 0 \\ \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.\frac{\partial \omega}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Pour résoudre efficacement ces équations couplées, on utilise une méthode de splitting de type ADI. On subdivise chaque pas de temps (ficitf) en deux.

1. Dans le premier *sous-pas* on passe du temps τ au temps $\tau + 1/2$. Les termes de dérivés sont des approximations centrées. Elles sont implicites si les dérivées sont suivant x et explicites si les dérivées sont suivant y.
2. Le deuxième *sous-pas* passe du temps $\tau+1/2$ au temps $\tau+1$. Les termes de dérivées sont toujours des approximations centrées. Cependant, elles sont explicites si les dérivées sont suivant y et implicites si les dérivées sont suivant x.

Question 1 : *Poser les équations d'évolution développées de ψ et ω pour les deux sous-pas.*

Traitement des conditions limites du domaine

On s'occupe ici de la frontière Γ du domaine. On introduit les fonctions f et g telles que :

$$f(x,y) = \psi \qquad\qquad g(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{11}$$

Où n est la normale sortante au domaine.

Question 2 : *Etablir ce que valent f et g sur les bords Γ du domaine.*

A partir de f et g, on trouve les ω et ψ de la frontière du domaine (ω_Γ et ψ_Γ). Pour ψ_Γ, on a simplement :

$$\psi_\Gamma(i,j) = f(i,j) \tag{12}$$

Les $\omega_\Gamma(i,j)$ demandent le calcul d'un développement de Taylor et l'égalité suivante :

$$\omega_\Gamma(i,j) = -(\psi_{xx} + \psi_{yy})_{i,j} \tag{13}$$

Voici le développement de Taylor sur la paroi gauche de la cavité :

$$\psi_{1_j} = \psi_{0,j} + \Delta x \psi_x\Big|_{0,j} + \frac{1}{2}\Delta x^2 \psi_{xx}\Big|_{0,j} + \cdots \tag{14}$$

alors :

$$\psi_{xx}\Big|_{0,j} = \frac{2}{\Delta x^2}(\psi_{1,j} - \psi_{0,j} - \Delta x \psi_x\Big|_{0,j}) \tag{15}$$

En substituant (15) dans (13) et utilisant les f et g, on obtient :

$$\omega_{0,j} = -\Big[\frac{2}{\Delta x^2}(\psi_{1,j} - f_{0,j} - \Delta x g_{0,j}) + f_{yy}\Big] \tag{16}$$

Question 3 : *En utilisant des développements de Taylor, calculer ω_Γ sur les autres parois.*

Question 4 : *Substituer les valeurs de f et g précédement calculées aux ψ_Γ et ω_Γ trouvés. On a alors des équations utilisables dans notre schéma.*

Schéma sous forme matricelle

On dispose maintenant des équations de résolution posées aussi bien à l'intérieur du domaine que sur ses bords. On peut poser l'équation d'évolution sous sa forme matricielle. Avant toute chose, il est nécessaire de se fixer une norme pour l'écriture vectorielle de $[\psi]$ et $[\omega]$, les vecteurs qui contiennent les valeurs $\psi_{i,j}$ et $\omega_{i,j}$ sur tout le domaine.

Question 5 : *Poser $[\psi]$ et $[\omega]$.*

Les vecteurs $[\psi]$ et $[\omega]$ sont posés. Il faut alors poser les matrices qui régissent l'évolution du schéma :

Sous-pas 1 :

$$[A_1][\psi]^{n+1/2} + [B_1][\psi]^n + [C_1][\omega]^n + [D_1] = 0 \tag{17}$$

$$[E_1][\omega]^{n+1/2} + [F_1][\omega]^n + [G_1] = 0 \tag{18}$$

Sous-pas 2 :

$$[A_2][\psi]^{n+1/2} + [B_2][\psi]^{n+1} + [C_2][\omega]^{n+1/2} + [D_2] = 0 \tag{19}$$

$$[E_2][\omega]^{n+1/2} + [F_2][\omega]^{n+1} + [G_2] = 0 \tag{20}$$

Question 6 : *Trouver les matrices $[A_i]$, $[B_i]$, $[C_i]$, $[E_i]$, $[F_i]$ et les vecteurs $[D_i]$ et $[G_i]$ (avec $i = \{1, 2\}$).*

Maintenant, vous pouvez coder... bonne chance !

Test du schéma

On testera le schéma pour différentes valeurs de U et S (ex : $(U, S) = (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, -1)$).

On tracera alors :
- Les courbes iso-valeur de la fonction de courant (avec la valeur maximale de cette fonction).
- Les courbes iso-valeur de la vorticité.
- Courbe de variation de max $|\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n}|$ vs τ^n.

Faire les tests avec $H = 1$, $L = 2$ et $Re = 100, 1000, 100000$. Les résultats seront présentés lors d'un examen oral.